

Как известно, общее решение u уравнения (10) представимо в виде суммы

$$u(\mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) + v_p(\mathbf{x}), \quad (11)$$

где $u^{(0)}$ – общее решение однородного уравнения

$$\mathcal{L}u^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (12)$$

v_p – частное решение уравнения (10).

Общее решение $u^{(0)}(\mathbf{x})$ однородного уравнения (12) представимо в виде

$$u^{(0)}(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0),$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^k(D(g^{(j)}))$, $j = 1, 2$, $D(g^{(j)})$ – области определения функций $g^{(j)}$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{Q}$, $D(g^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$.

В частности рассмотрена задача со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОМ УДАРЕ ПО ДЛИННОМУ УПРУГОМУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ

В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь korzyuk@bsu.by

Рассматривается первая смешанная задача для волнового уравнения в четверти плоскости

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), 0 < t < \infty, 0 < x < \infty, \quad (13)$$

$$u(0, x) = \phi(x), x \geq 0, \partial_t u(0, x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (14)$$

$$(\partial_t^2 + b^2 \partial_x^2)u(t, 0) = \mu(t), t \geq 0, \quad (15)$$

где a^2 и b^2 – положительные действительные числа, ϕ , ψ_2 , μ – некоторые функции, ψ_1 – действительное число.

Для решения задачи (13) – (15) рассматривается вспомогательная задача. К уравнению (13) присоединяются условия Коши

$$u(0, x) = \phi(x), x \geq 0, \partial_t u(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x \in (0, x^*), \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \in (x^*, \infty), \end{cases} \quad (16)$$

и граничное условие (15). При этом полагаем, что $x^* > 0$, $\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x \in (x^*, \infty)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$.

Определение 1. Функцию u назовем классическим решением задачи (13), (16) (15), если u дважды непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет уравнению (13) всюду, за исключением характеристик $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$, первому из (16) условию

$u(0, x) = \phi(x)$, $x \geq 0$, граничному условию (15) и второму из (16) условию Коши на множестве $[0, x^*) \cup (x^*, \infty)$. Кроме того, функция u на характеристиках $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$ удовлетворяет соответствующим условиям сопряжения.

Теорема 1. Если выполняются условия гладкости для заданных функций: $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$, $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_1 \in C^1([0, x^*])$, $\psi_2 \in C^1([x^*, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$, то существует единственное классическое решение задачи (13), (16), (15) в смысле определения 1, и оно принадлежит классу $C([0, \infty) \times [0, \infty))$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$, $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_1 \in C^1([0, x^*])$, $\psi_2 \in C^1([x^*, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$. Тогда решение задачи (13), (16), (15) в смысле определения 1, принадлежит классу $C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(x^*) = \psi_2(x^*)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$, $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_1 \in C^1([0, x^*])$, $\psi_2 \in C^1([x^*, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$. Тогда решение задачи (13), (16), (15) в смысле определения 1, принадлежит классам $C^2(\{(t, x) | t > 0, x > 0, x - at > 0\})$ и $C^2(\{(t, x) | t > 0, x > 0, x - at < 0\})$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(x^*) = \psi_2(x^*)$ и $\psi_1'(x^*) = \psi_2'(x^*)$.

Задача с условиями сопряжения. Нахождение классического решения задачи (13), (16), (15) эквивалентно решению следующей задачи: найти решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям Коши (16), граничному условию (15) и следующим условиям сопряжения

$$\begin{aligned} [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, at - x^*) &= 0, \\ [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x^* - at) &= [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x^* + at) = \frac{\delta\psi}{2}, \\ [(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, at - x^*) &= \frac{b^2\delta\psi + a^2\delta\psi^{(1)}}{2a}, \\ [(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, x^* - at) &= [(\partial_t^2 u)^- - (\partial_t^2 u)^+](t, x^* + at) = a\frac{\delta\psi^{(1)}}{2}, \\ [u^+ - u^-](t, at) &= [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, at) = 0, \\ [(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, at) &= f(0, 0) - \mu(0) + a^2\phi''(0) + b^2\phi'(0). \end{aligned}$$

Предельный переход. Решение задачи (13) – (15) строится из решения задачи (13), (16), (15) предельным переходом.

Теорема. Пусть выполняются условия $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$, $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$, тогда решение задачи (1) – (3) в смысле определения 1 при $x^* = 0$, является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu(0) = f(0, 0) + a^2\phi''(0) + b^2\phi'(0)$. Кроме того, оно принадлежит классам $C([0, \infty) \times [0, \infty))$, $C^2(\{(t, x) | t > 0, x > 0, x - at > 0\})$ и $C^2(\{(t, x) | t > 0, x > 0, x - at < 0\})$ и удовлетворяет условиям сопряжения

$$\begin{aligned} [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, at) &= \psi_2(0+) - \psi_1, \\ [(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t, at) &= (\psi_1 - \psi_2(0+))/(2a), \\ [(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, at) &= f(0, 0) - \mu(0) + a^2\phi''(0) + \frac{b^2(\psi_2(0+) - \psi_1 + 2a\phi'(0))}{2a}, \\ [(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-](t, at) &= \frac{b^2(\psi_2(0+) - \psi_1)}{2a^3} + \phi''(0) + \frac{f(0, 0) - \mu(0) + b^2\phi'(0)}{a^2}, \\ [(\partial_t \partial_x u)^+ - (\partial_t \partial_x u)^-](t, at) &= \frac{b^2(\psi_1 - \psi_2(0+)) - 2a(a^2\phi''(0) + b^2\phi'(0) + f(0, 0) - \mu(0))}{2a^2}. \end{aligned}$$

1. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. Изд. 2, испр. и доп. – URSS, 2021. – 480 с. ISBN 978-5-9710-8715-1.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С. Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 2. – Минск: БГУ, 2017. 50 с.

3. Юрчук Н. И., Новиков Е. Н. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук* – 2016, Т. 52, № 4, С. 116-120.

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КИРХГОФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

В.И. Корзюк^{1,2}, И.И. Столярчук²

¹Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by

²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
ivan.telkontar@gmail.com

Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырех независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = (0, +\infty) \times \Omega$, где $\Omega = \{\mathbf{x}' | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^3$, относительно неизвестной функции $u : \mathbf{R}^4 \supset Q \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$ задается волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta_{\mathbf{x}'} u = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел, $\Delta_{\mathbf{x}'} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ – оператор Лапласа.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\mathbf{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\mathbf{x}'), \quad (2)$$

где $\varphi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \varphi(\mathbf{x}') \in \mathbf{R}$, $\psi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \psi(\mathbf{x}') \in \mathbf{R}$ – заданные функции. И граничное условие на боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$

$$u|_{\Gamma} = \mu(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mu : \mathbf{R}^4 \supset \Gamma \rightarrow \mu(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$ – заданная функция.

Теорема Пусть $\varphi(\mathbf{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi(\mathbf{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu(\mathbf{x}) \in C^3(\Gamma)$. Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\mu(0, \mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}'), \quad \partial_{x_0} \mu(0, \mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}'),$$

$$\partial_{x_0}^2 \mu(0, \mathbf{x}') = a^2 \Delta_{\mathbf{x}'} \varphi(\mathbf{x}'), \quad \partial_{x_0}^3 \mu(0, \mathbf{x}') = a^2 \Delta_{\mathbf{x}'} \psi(\mathbf{x}')$$

и оно может быть найдено в точках $\mathbf{x}$, у которых $x_0 \in \left[\frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a} \right]$, $k = 1, 2, \dots$ по формуле

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \tilde{\mu}(\tau_j^{(k;N)}(x_0), \mathbf{y}') ds'_{\mathbf{y}'} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\mathbf{y}') ds'_{\mathbf{y}'} + \frac{(-1)^k}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\mathbf{y}') ds'_{\mathbf{y}'} \right),$$