ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ И НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

В.И. Корзюк[1,2], О.А. Ковнацкая[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
Korzyuk@bsu.by
[2]Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь Kovnatskaya@bsu.by

Введение. С помощью метода характеристик получены в аналитическом виде классические решения задач для одномерного волнового уравнения с условиями, заданными и на характеристиках, и на нехарактеристических линиях, на которые налагаются определенные условия. В других источниках данная задача исследуется под названием задача Пикара. Показана единственность полученного решения, а также необходимость и достаточность условий согласования при определенной гладкости заданных функций.

Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\mathcal{L}u = (\partial_{x_1}^2 - a^2\partial_{x_2}^2)u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где $\partial_{x_j}^2 = \partial_{x_j}\partial_{x_j}$ – операторы дифференцирования второго порядка по переменным x_j, $j = 1, 2$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial_{x_j}$, $a \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) [2] имеет два семейства характеристик $x_2 \pm ax_1 = const$.

К уравнению (1) присоединим условия Дирихле, которые задаются на характеристике $\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \mid x_2 + ax_1 = b^{(0)}\}$ и некоторой линии $\gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid x_2 = \mu(x_1)\}$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$ (см. рис. 1):

$$u(x_1, x_2 = -ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x_1, x_2 = \mu(x_1)) = \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Условие 1. *Линия $\gamma^{(2)}$ такова, что любая характеристика из семейства $x_2 + ax_1 = const$ пересекает ее только в одной точке плоскости $\mathbb{R}^2$.*

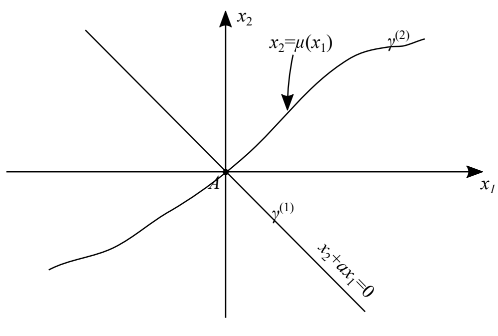

Рис. 1

Определение 1. Классическим решением задачи (1)–(3) назовем функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), где f, $\varphi^{(j)}$, $j = 1, 2$, – заданные функции, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0). \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. При указанных условиях гладкости заданных функций $\varphi^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ и f функция*

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(-\frac{\nu(x_2 + ax_1)}{2a}\right) - \varphi^{(1)}\left(-\frac{\nu(x_2 + ax_1) + x_2 + ax_1}{2a}\right) -$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_{s(x_2+ax_1)}^{x_2-ax_1} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\xi\right) d\eta,$$

где $z = \nu(y)$ – функция, обратная к функции $y = \mu\left(-\frac{z}{2a}\right) - \frac{z}{2}$, есть функция из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ и является единственным решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Литература

1. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А. *Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57. № 2. С. 148–155.
2. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк[1], **И.С. Козловская**[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2]Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь kozlovskaja@bsu.by

В данной работе рассматриваются разного рода граничные задачи в четверти плоскости для волнового уравнения. Определяется классическое решение для каждой задачи рассматриваемого уравнения. Для построения этого решения выписывается частное решение в четверти плоскости исходного волнового уравнения. Для заданных функций каждой граничной задачи выводятся условия согласования, которые являются необходимым и достаточным условием, чтобы представленное решение было классическим.

Важным моментом решения таких задач является конструкция частного решения уравнения. Для задачи Коши в полуплоскости эффективным методом построения частного решения является метод Дюамеля через решение вспомогательной задачи Коши для однородного уравнения. В случае других областей рассматриваемых задач, отличных от полуплоскости и полупространства частное решение строится либо методом Дюамеля с помощью предварительного продолжения заданной функции в правой части уравнения, либо строится в подобластях рассматриваемой задачи. В последнем случае необходимо склеить полученные решения на границах подобластей, не теряя их гладкости.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ $\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\right)$ рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$\mathcal{L}u = \left(\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2\right) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty), \tag{10}$$

относительно искомой функции $u : \overline{Q} \ni \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где ∂_{x_0}, ∂_{x_1} - операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно, $\partial_{x_0}^2 = \partial_{x_0}\partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2 = \partial_{x_1}\partial_{x_1}$, a^2 - положительное число из $\mathbb{R}$. Для уравнения (10) в четверти плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется классическое решение.