

Уравнение (7) получается из (6) преобразованием  $p \rightarrow p_1$ ,  $b \rightarrow 1 - b$ .

Поскольку вторые компоненты пар  $(q_1, p_1)$  и  $(q, p)$  из (2), (4) можно представить в виде

$$p_1 = \left( -\frac{1}{p} + \frac{(p' + bp^2)^2}{2p^2} + t \right)^{-1}, \quad (8)$$

$$p = \left( -\frac{1}{p_1} + \frac{(p'_1 + (1-b)p_1^2)^2}{2p_1^2} + t \right)^{-1} \quad (9)$$

соответственно, то формулы (8), (9) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (6).

Уравнение (6) в случае  $p = b^{-1}v$ ,  $b = \beta + \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$ ,  $\varepsilon^2 = 1$ ,  $\beta$  — параметр, рассматривалось в [2].

### Литература

1. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Харьков: ОНТИ, 1939.
2. Kudryashov N.A. *Rational solutions of equations associated with the second Painleve' equation* // Regular and chaotic dynamics. 2020. Vol. 25. no 3. P. 273–280.

## СИСТЕМЫ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ЦЕНТРА

Чергинец Д.Н.

Белгосуниверситет, механико-математический факультет  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь cherginetsdn@gmail.com

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано [1], что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С.Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [2] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала [3], что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))x - (a^2x^2 + y^2)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))y + (a^2x^2 + y^2)x, \end{aligned} \quad (1)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < 1$ . Автором доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Положение равновесия  $O(0,0)$  системы (1) является центром тогда и только тогда, когда  $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$ , где*

$$\Phi_n(a) := \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^{2+\sigma}(a^2+t^2)^{1-\sigma}} dt, \quad \sigma := 2a^2/(1-a^2).$$

Причем

$$b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2a - 4a^2 - 8a^3 \ln a + O(a^3), \quad a \rightarrow +0.$$

При  $a = 0$  положение равновесия  $O(0, 0)$  системы (1) не является изолированным, так как каждая точка оси  $OX$  является положением равновесия. Поэтому рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}((2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))x - (a^2x^2 + y^2)y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}((2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))y + (a^2x^2 + y^2)x),\end{aligned}\quad (2)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $-1 < a < 1$ . Для системы (2) справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Особая точка  $O(0, 0)$  системы (2) является центром тогда и только тогда, когда  $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$ , причем*

$$-\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2|a| - 4a^2 - 8|a|^3 \ln |a| + O(a^3), \quad a \rightarrow 0.$$

**Следствие.** *Необходимое и достаточное условие центра для системы (2) определяется функцией, которая является неаналитической во внутренней точке области монодромности.*

### Литература

1. Садовский А.П. О проблеме различения центра и фокуса для систем с ненулевой линейной частью // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 7. С. 1238–1246.
2. Ильяшенко Ю.С. Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 3. С. 30–37.
3. Медведева Н.Б. Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса // Сборник статей, Тр. МИАНГ. 2006. Т. 254. С. 11–100.

## О ФРАКТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРИ-ТКАНИ

А.М. Шелехов

Московский педагогический государственный университет, Россия, Москва, [amshelekhov@yandex.ru](mailto:amshelekhov@yandex.ru)

Рассматриваются конфигурации из линий криволинейной три-ткани, которые можно вписать в треугольник, образованный линиями этой ткани. В случае, если вписанная конфигурация является триангулирующей, она порождает в каждом таком треугольнике фрактал. Это обстоятельство позволяет с гладкой функцией двух переменных ассоциировать некоторый фрактал, обобщающий известный треугольник Серпинского. Вводится понятие регулярного фрактала и доказывается, что регулярный фрактал получается только для регулярной три-ткани (обобщение основной теоремы о шестиугольной три-ткани). Найдены фрактальные размерности некоторых регулярных фракталов и сформулированы проблемы, связанные с оценкой фрактальной размерности.

### Литература

1. Шелехов А.М. О фрактальных конструкциях на криволинейной три-ткани. Известия вузов. Математика 2019, № 9, с. 63–72 .М.  
(Shelekhov. On Fractal Constructions on Curvilinear Three-Web Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 9, pp. 55–62.)