

Литература

1. Khvostchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018. M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin eds. Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.
2. Амелкин В.В., Василевич М.Н., Хвоцинская Л.А. *Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – № 3. – С. 263–273.

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Цегельник В.В.¹

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, факультет компьютерных систем и сетей

П.Бровки, 6, 220013 Минск, Беларусь tsegvv@bsuir.by

Относительно решений системы уравнений

$$q' = \frac{1}{p} - q^2 - \frac{t}{2}, \quad p' = -2pq - bp^2 \quad (1)$$

с неизвестными функциями p, q независимой переменной t и параметром b справедлива**Теорема 1.** Пусть (q, p) — решение системы (1). Тогда

$$(q_1, p_1) = \left(-q, \left(-\frac{1}{p} + 2q^2 + t \right)^{-1} \right) \quad (2)$$

есть решение системы

$$q'_1 = \frac{1}{p_1} - q_1^2 - \frac{t}{2}, \quad p'_1 = -2p_1q_1 + (b-1)p_1^2. \quad (3)$$

Для доказательства теоремы достаточно пару (q_1, p_1) , определяемую (2), подставить в (3) с учетом (1). Справедлива также**Теорема 2.** Пусть (q_1, p_1) — решение системы (3). Тогда

$$(q, p) = \left(-q_1, \left(-\frac{1}{p_1} + 2q_1^2 + t \right)^{-1} \right) \quad (4)$$

— решение системы (1).

Система (1) по q эквивалентна второму уравнению Пенлеве [1]

$$q'' = 2q^3 + tq + b - \frac{1}{2}, \quad (5)$$

а по p — уравнению

$$2pp'' = 3p'^2 - 4p + 2tp^2 + b^2p^4. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (1) (в силу (2)) следует, что общее решение уравнения (6) не имеет подвижных критических особых точек. Следовательно оно является уравнением Пенлеве-типа.

Система (3) по p_1 эквивалентна уравнению

$$2p_1p_1'' = 3p_1'^2 - 4p_1 + 2tp_1^2 + (1-b)^2p_1^4. \quad (7)$$

Уравнение (7) получается из (6) преобразованием $p \rightarrow p_1$, $b \rightarrow 1 - b$.

Поскольку вторые компоненты пар (q_1, p_1) и (q, p) из (2), (4) можно представить в виде

$$p_1 = \left(-\frac{1}{p} + \frac{(p' + bp^2)^2}{2p^2} + t \right)^{-1}, \quad (8)$$

$$p = \left(-\frac{1}{p_1} + \frac{(p'_1 + (1-b)p_1^2)^2}{2p_1^2} + t \right)^{-1} \quad (9)$$

соответственно, то формулы (8), (9) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (6).

Уравнение (6) в случае $p = b^{-1}v$, $b = \beta + \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$, β — параметр, рассматривалось в [2].

Литература

1. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Харьков: ОНТИ, 1939.
2. Kudryashov N.A. *Rational solutions of equations associated with the second Painleve' equation* // Regular and chaotic dynamics. 2020. Vol. 25. no 3. P. 273–280.

СИСТЕМЫ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ЦЕНТРА

Чергинец Д.Н.

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь cherginetsdn@gmail.com

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано [1], что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С.Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [2] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала [3], что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))x - (a^2x^2 + y^2)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (2a^2xy + y^2(bx^2 + y^2))y + (a^2x^2 + y^2)x, \end{aligned} \quad (1)$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Автором доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Положение равновесия $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$, где*

$$\Phi_n(a) := \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^{2+\sigma}(a^2+t^2)^{1-\sigma}} dt, \quad \sigma := 2a^2/(1-a^2).$$

Причем

$$b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2a - 4a^2 - 8a^3 \ln a + O(a^3), \quad a \rightarrow +0.$$