

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННОЙ ГРУППЕ МОНОДРОМИИ

Хвощинская Л.А.¹, Василович М.Н.²

¹Белгосуниверситет, МГЭИ им. А.Д. Сахарова
Долгобродская 23/1, 220037 Минск, Беларусь ludmila.ark@gmail.com

²Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь vasilevich.m@gmail.com

Рассматривается задача определения системы двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением четырех точек a_1, a_2, a_3, a_4 по заданной группе монодромии:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -e^{\pi i \alpha_1} & -\lambda(1 + e^{\pi i \alpha_1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = V_1^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-\pi i \alpha_1} & -\lambda(1 + e^{-\pi i \alpha_1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1}(1 + e^{\pi i \alpha_2}) & -e^{\pi i \alpha_2} \end{pmatrix}, \quad V_4 = V_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1}(1 + e^{-\pi i \alpha_2}) & -e^{-\pi i \alpha_2} \end{pmatrix},$$

где α_1, α_2 — действительные числа, $0 < \alpha_2, \alpha_1 < 1$, λ — параметр. Решение задачи ищем в классе функций, ограниченных при $z \rightarrow a_k$, $k = 1, \dots, 4$.

Обозначим λ_k, μ_k — характеристические числа матриц V_k , $k = 1, \dots, 4$:

$$\lambda_1 = -e^{\pi i \alpha_1}, \quad \lambda_2 = -e^{-\pi i \alpha_1}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = -e^{\pi i \alpha_2}, \quad \mu_4 = -e^{-\pi i \alpha_2}.$$

Далее находим числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_k$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_k < 1$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \mu_k$, $0 \leq \operatorname{Re} \sigma_k < 1$, $k = 1, \dots, 4$:

$$\rho_1 = \frac{1 + \alpha_1}{2} = \rho, \quad \rho_2 = \frac{1 - \alpha_1}{2} = 1 - \rho, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \rho_3 = \rho_4 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{1 + \alpha_2}{2} = \sigma, \quad \sigma_4 = \frac{1 - \alpha_2}{2} = 1 - \sigma, \quad \Delta = \sum_{k=1}^4 (\rho_k + \sigma_k) = 2.$$

Выбирая в качестве исключительной точки $z = \infty$, порядки решения k_1, k_2 на бесконечности находим из соотношения Фукса: $\sum_{k=1}^4 (\rho_k + \sigma_k) + k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 0$. Далее при построении дифференциального уравнения применялся «метод логарифмирования произведения матриц» [1].

В результате [2] было построено дифференциальное уравнение

$$\frac{dY}{dz} = Y \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & 0 \\ 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}}{z - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & 0 \\ -1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}}{z - a_2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 - \alpha_2 \\ 0 & 1 + \alpha_2 \end{pmatrix}}{z - a_3} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 - 1 \\ 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}}{z - a_4} \right]$$

и соответствующее ему дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} - \frac{\alpha_1 + 1}{z - a_2} + \frac{\alpha_2 - 3}{z - a_3} - \frac{\alpha_2 + 3}{z - a_4} \right) y' +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_2}{(z - a_1)(z - a_3)} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(z - a_1)(z - a_4)} + \frac{1 + \alpha_1}{(z - a_2)(z - a_4)} \right) y = 0,$$

из фундаментальной системы решений которого и строится решение нашей задачи.

Литература

1. Khvostchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018. M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin eds. Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.
2. Амелкин В.В., Василевич М.Н., Хвоцинская Л.А. *Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – № 3. – С. 263–273.

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Цегельник В.В.¹

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, факультет компьютерных систем и сетей

П.Бровки, 6, 220013 Минск, Беларусь tsegvv@bsuir.by

Относительно решений системы уравнений

$$q' = \frac{1}{p} - q^2 - \frac{t}{2}, \quad p' = -2pq - bp^2 \quad (1)$$

с неизвестными функциями p, q независимой переменной t и параметром b справедлива

Теорема 1. Пусть (q, p) — решение системы (1). Тогда

$$(q_1, p_1) = \left(-q, \left(-\frac{1}{p} + 2q^2 + t \right)^{-1} \right) \quad (2)$$

есть решение системы

$$q'_1 = \frac{1}{p_1} - q_1^2 - \frac{t}{2}, \quad p'_1 = -2p_1q_1 + (b-1)p_1^2. \quad (3)$$

Для доказательства теоремы достаточно пару (q_1, p_1) , определяемую (2), подставить в (3) с учетом (1). Справедлива также

Теорема 2. Пусть (q_1, p_1) — решение системы (3). Тогда

$$(q, p) = \left(-q_1, \left(-\frac{1}{p_1} + 2q_1^2 + t \right)^{-1} \right) \quad (4)$$

— решение системы (1).

Система (1) по q эквивалентна второму уравнению Пенлеве [1]

$$q'' = 2q^3 + tq + b - \frac{1}{2}, \quad (5)$$

а по p — уравнению

$$2pp'' = 3p'^2 - 4p + 2tp^2 + b^2p^4. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (1) (в силу (2)) следует, что общее решение уравнения (6) не имеет подвижных критических особых точек. Следовательно оно является уравнением Пенлеве-типа.

Система (3) по p_1 эквивалентна уравнению

$$2p_1p_1'' = 3p_1'^2 - 4p_1 + 2tp_1^2 + (1-b)^2p_1^4. \quad (7)$$