находятся трансверсальные кривые множества $W = \{(x,y) \in \Omega : \Psi(x,y) = 0\}$, определяющие верхнюю границу для числа предельных циклов на основе признака Дюлака – Черкаса

Теорема 1. *Пусть в односвязной области Ω система (1) имеет одну или несколько точек покоя $O_l, l = \overline{1,p}$ с суммарным индексом Пуанкаре $+1$, а Ψ представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы (1), удовлетворяющую при $k < 0$ условию $\Phi(x,y) = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q \geq 0 (\leq 0)$. Если в области Ω множество W состоит из s изолированных вложенных друг в друга овалов $\omega_j, j = \overline{1,s}$, каждый из которых окружает все точки O_l. Тогда в любой из $s-1$ кольцеобразных подобластей $\Omega_i, i = \overline{1,s-1}$, ограниченных соседними из этих овалов, система (1) имеет ровно один предельный цикл LC_i, а во внешней подобласти Ω_s она может иметь более одного предельного цикла.*

Для проверки существования предельного цикла во внешней подобласти Ω_s выполняется второй шаг, нацеленный на построение дополнительной замкнутой трансверсальной кривой, окружающей ранее найденные замкнутые кривые. Требуемая кривая на втором шаге находится за счет дополнительного применения признака Дюлака – Черкаса, или признака Дюлака, или их обобщений. В частности, доказан следующий результат

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 1 и существует вторая функция Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x,y) \in C^1(\Omega, R)$ при $\tilde{k} < 0$ такая, что в области Ω множество $\tilde{W} = \{(x,y) \in \Omega : \tilde{\Psi} = 0\}$ состоит из $s+1$ овалов $\tilde{w}_i$, окружающих всю группу точек O_i. При чем множество $\tilde{V} = \{(x,y) \in \Omega : \tilde{\Phi} \equiv \tilde{k}\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = 0\}$ не пересекается с овалами $\tilde{w}_s$, $\tilde{w}_{s+1}$ множества $\tilde{W}$ и не имеет между ними своих овалов, окружающих овал $\tilde{w}_s$. Тогда система (1) в области Ω имеет точно s предельных циклов.*

Эффективность разработанного способа продемонстрирована на примерах полиномиальных систем, включая обобщенную систему ван дер Поля.

Литература

1. Гринь А.А. *Трансверсальные кривые для установления точного числа предельных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 427–437.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НИЖНЕТРЕУГОЛЬНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

В 1955 г. Я. Курцвейль и О. Вейвода показали [1], что разрешенная относительно производной система обыкновенных дифференциальных почти периодический уравнений может допускать такие решения, что пересечение частотного модуля решения и модуля частот правой части системы является тривиальным. Впоследствии такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными [2]. Периодический случай, в котором нерегулярность означает несоизмеримость частот решения и системы, изучал Х. Массера [3].

Задача синтеза линейных обыкновенных почти периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, была поставлена как задача управления асинхронным спектром в работе [4], в которой даны условия разрешимости для случая, когда среднее значение матрицы коэффициентов нулевое.

В докладе приводятся достаточные условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем, среднее значение матрицы коэффициентов которых приводится к нижнетреугольному виду.

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$– фазовый вектор, $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$– вход, $A(t)$– непрерывная почти периодическая $n\times n$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}\,(A)$, B– постоянная $n\times n$-матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $n \times n$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$.

Задача выбора коэффициента обратной связи $U(t)$ из указанного допустимого множества таким, чтобы замкнутая управлением (2) система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение, спектр частот которого содержит заданное подмножество L, называется *задачей управления асинхронным спектром системы (1) с целевым множеством* L.

Если матрица при управлении невырождена, то решение поставленной задачи не вызывает затруднений. Поэтому будем предполагать, что выполняется условие

$$\mathrm{rank}\, B = r < n. \tag{4}$$

В таком случае согласно [5, с. 110] найдется постоянная неособенная вещественная $n\times$-матрица S такая, что у матрицы SB первые $d = n - r$ строк нулевые, в то время как остальные ее r строк линейно независимы. Положим $S^{-1}A(t)S = C(t)$.

Имеет место

Теорема. *Пусть для системы (1) выполняется условие (4) и матрица*

$$\hat{C} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(t)dt$$

имеет нижнетреугольный вид.

Задача управления асинхронным спектром системы (1) разрешима тогда и только тогда, когда левый верхний прямоугольный блок размера $d \times r$ *матрицы* $C(t)$ *имеет неполный столбцовый ранг, равный* r_1 *, и мощность целевого множества частот ограничена величиной* $[(r - r_1)/2]$.

Исследования поддержаны БРФФИ (проект № Ф20Р - 005 "Задачи управления по первому приближению для нестационарных систем в условиях неопределенности").

Литература

1. Курцвейль Я, Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362 – 370.

2. Деменчук А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. - Saarbrucken, 2012.

3. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales . Bol. de la Facultad de Ingenieria Montevideo. - 1950. - Vol. 4, № 1. -P. 37 - 45.

4. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37 – 42.

5. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 492 с.