

Определение 1. Решением уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}$ будем называть элемент $Y \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, такой что для любого $t \in [0, T]$ выполнено равенство

$$Y_t = x + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s, \quad (2)$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается как грубый потраекторный интеграл [1]. Будем говорить, что уравнение (1) с начальным условием $Y_0 = x$ имеет единственное решение, если для любых решений $Y, \tilde{Y} \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ уравнения (1) таких, что $Y_0 = \tilde{Y}_0 = x$, следует, что $Y_t = \tilde{Y}_t$ для любых $t \in [0, T]$.

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ уравнение (1) с начальным условием $Y_0 = x$ имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле $Y_t = S_{X_t - X_0}x$, где $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ – поток, соответствующий уравнению $dZ_t = f(Z_t)dt$.

Литература

1. Васьковский М. М. *Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 10. С. 1305–1317.

О БЭРОВСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ε -ЕМКОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Ветохин А.Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, Российская Федерация, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.
{anveto27}@yandex.ru

В качестве меры “массивности” компактного метрического пространства (X, d) А.Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε -емкости, которая определяется как максимальное число ε -различимых элементов в X . Используя это понятие, для произвольного положительного ε рассмотрим ε -емкость неавтономной динамической системы [2], которая определяется формулой

$$h_d(f, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n).$$

Эта величина характеризует скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с точностью ε . Отметим, что ε -емкость неавтономной динамической системы зависит от выбора метрики на пространстве X .

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad (1)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon). \quad (2)$$

В настоящей работе будем изучать функцию (2) с точки зрения бэровской классификации разрывных функций. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа

p функциями p -го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$ -го класса.

Теорема 1 [3]. Для любой последовательности отображений (1) функция (2) принадлежит второму бэровскому классу, причем ее множество точек полунепрерывности сверху является всюду плотным множеством типа G_δ , а множество точек полунепрерывности снизу — множеством типа $F_{\sigma\delta}$.

Естественно возникает вопрос об уменьшении номера бэровского класса в теореме 1. Пусть $\mathcal{K}$ — совершенное множество Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой.

Теорема 2 [3]. Пусть $M = X = \mathcal{K}$, тогда существует такая последовательность отображений (1), что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{4}]$ функция (2) не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве M .

Возникает естественный вопрос: всякое ли всюду плотное множество типа G_δ в пространстве M может быть множеством точек полунепрерывности сверху функции (2)?

Теорема 3 [3]. Пусть $M = X = \mathcal{K}$. Тогда для каждого всюду плотного подмножества G типа G_δ пространства M существует такая последовательность отображений (1), что множество точек полунепрерывности сверху функции (2) совпадает с множеством G .

Литература

1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т.179, № 3. 585–589.
2. Kolyada S., Snoha L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Computational Dynamics. 1996. 4, № 2–3. Р. 205–233.
3. Ветохин А.Н. Строение множеств точек полунепрерывности ε -емкости неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 6, С. 19–26.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР, ПОРОЖДЕННЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ОСЦИЛЛЯТОРА

Ю.М. Вувуникян¹, Д.С. Шпак²

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь

¹vuv64@mail.ru, ²d.s.shpak@grsu.by

Осциллятор — это физическая система, совершающая колебания. В случае классического осциллятора колебания совершаются около положения устойчивого равновесия (например, груз на пружине, маятник). Продемонстрируем операторный подход в исследовании уравнения осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой cx^2 и затуханием, совершающим вынужденные колебания при произвольном внешнем воздействии $f(t)$:

$$x'' + x + cx^2 = f(t). \quad (1)$$

Правую часть уравнения (1) определим как финитную непрерывно дифференцируемую функцию.

$$f(t) = \omega_\varepsilon(t) * \theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(s) \theta(t-s) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) dt = t,$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\omega_\varepsilon(t)$ — бесконечно-дифференцируемая функция с компактным носителем на отрезке $[-\varepsilon; \varepsilon]$ (или «шапочка»).