$\mathcal{Q}_n[A](M)$. Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, §1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

Напомним, что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ называется [2, с. 224] функцией класса $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r,+\infty]\big)$ луча $[r,+\infty]$ является G_δ-множеством пространства M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ — подкласс второго класса Бэра.

Теорема. *Для каждых метрического пространства M и натурального числа $n \geq 2$ пара $\big(l, F(\cdot)\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$; 2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$; 3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $\mu \in M$ и $i = \overline{1, n}$; 4) для любого $i = \overline{1, n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.

Замечание. Аналог приведённой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентами установлен в работе [3], а полное описание класса

$$\Lambda\mathcal{Q}_n(M) = \{\Lambda(\cdot\,; A + Q) \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\, Q \in \mathcal{Q}_n[A](M)\},$$

составленного из вторых элементов пар класса $\Pi\mathcal{Q}_n(M)$, получено в [4].

Автор выражает благодарность Е. А. Барабанову за обсуждение доклада и ценные замечания.

Литература

1. Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

2. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

3. Барабанов Е.А., Быков В.В. *Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности* // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

4. Быков В.В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами* // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 3–22.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

Васьковский М.М., Леваков А.А.[1]

[1]Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Независимости, 4, 220050 Минск, Беларусь

vaskovskii@bsu.by, levakov123321@gmail.com

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$. Предположим, что задана функция $X : [0,T] \to \mathbb{R}$, непрерывная по Гёльдеру с показателем $\beta \in (0,1)$, т.е. $X \in C^\beta([0,T], \mathbb{R})$. Определим геометрическую грубую траекторию над X: $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\beta([0,T], \mathbb{R})$, $\mathbf{X}^i_{s,t} = \frac{(X_t - X_s)^i}{i!}$, $s, t \in [0,T]$, $i = 1, \ldots, n$ [1]. Далее $\mathbf{X}_{0,t}$ будем обозначать через $\mathbf{X}_t$. Выберем и зафиксируем произвольное $\alpha \in (0, \beta)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t, t \in [0,T], \tag{1}$$

где $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $k \in \{0, \ldots, n+1\}$.

Определение 1. Решением уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}$ будем называть элемент $Y \in C^{\alpha}([0,T],\mathbb{R})$, такой что для любого $t \in [0,T]$ выполнено равенство

$$Y_t = x + \int_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s, \tag{2}$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается как грубый потраекторный интеграл [1]. Будем говорить, что уравнение (1) с начальным условием $Y_0 = x$ имеет единственное решение, если для любых решений $Y, \widetilde{Y} \in C^{\alpha}([0,T],\mathbb{R})$ уравнения (1) таких, что $Y_0 = \widetilde{Y}_0 = x$, следует, что $Y_t = \widetilde{Y}_t$ для любых $t \in [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^{\beta}([0,T],\mathbb{R})$. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ уравнение (1) с начальным условием $Y_0 = x$ имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле $Y_t = S_{X_t - X_0} x$, где $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ – поток, соответствующий уравнению $dZ_t = f(Z_t)dt$.

Литература

1. Васьковский М. М. *Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 10. С. 1305–1317.

О БЭРОВСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ε-ЕМКОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Ветохин А.Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, Российская Федерация, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.
{anveto27}@yandex.ru

В качестве меры “массивности” компактного метрического пространства (X,d) А.Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε-емкости, которая определяется как максимальное число ε-различимых элементов в X. Используя это понятие, для произвольного положительного ε рассмотрим ε-емкость неавтономной динамической системы [2], которая определяется формулой

$$h_d(f,\varepsilon) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f,\varepsilon,n).$$

Эта величина характеризует скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с точностью ε. Отметим, что ε-емкость неавтономной динамической системы зависит от выбора метрики на пространстве X.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \ldots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \to X, \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon). \tag{2}$$

В настоящей работе будем изучать функцию (2) с точки зрения бэровской классификации разрывных функций. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа