

1. Антоневиц А.Б., Радыно Я.В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // ДАН СССР — 1991. — Т. 318. — С. 267—270.
2. Антоневиц А.Б., Шагова Т.Г. Умножение распределений и алгебры мнемифункций // СМФН — 2019. — Т. 65, выпуск 3. — С. 339—389.
3. Гулецкая О.И., Радыно Я.В. К теории обобщенных функций от операторов // Весці АН Беларусі— 1995. — №2.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. - М.: Мир, 1966. - 1064 с.
5. Тильман Х.Г. Vector-valued distributions and the spectral theorem for self-adjoint operators in Hilbert spaces // Bull. Math. Soc. - 1993. — №99 — p. 67-71.

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Пономарева, О.Н. Пыжкова

Минск, Республика Беларусь

Будем рассматривать задачу типа Коши

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi \end{cases} \quad (1)$$

с дробной производной Римана–Лиувилля D^α порядка α , $0 < \alpha < 1$ в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ определенных на отрезке $[0, T]$ и непрерывных на $(0, T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t)$.

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \leq \mu(t) + \nu(t) |u|^k \quad (0 < t \leq T, \quad -\infty < u < \infty), \quad (2)$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — некоторые неотрицательные функции со свойствами

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \in C_{1-\alpha}, \quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} \nu(s) ds \in C_{1-\alpha}, \quad (3)$$

обеспечивающими ограниченность и полную непрерывность оператора $Ax(t) = \frac{\xi \cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$ в пространстве $C_{1-\alpha}$, $k \geq 1$.

Решение задачи (1) сводится к отысканию неподвижных точек указанного оператора $Ax(t)$ (см. [1]). Но при этом явный вид решения получить непросто. Часто может быть достаточно поточечной оценки решения. Наиболее известными инструментами, позволяющими строить оценки дифференциальных уравнений, являются леммы Бихари и Гронуола–Беллмана (см., например, [2]). С помощью первой из них получим оценку решения уравнения (1) в соответствующем функциональном пространстве.

Утверждение Пусть для функции $f(t, u)$ выполняются условия (2) и (3). Тогда для решения задачи Коши (1) выполняется оценка

$$x(t) \leq c \left[1 - (m-1)c^{m-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \right]^{\frac{1}{1-m}},$$

$$\text{где } c = \left| \frac{\xi \cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds.$$

Літэратура

1. Забрэйко, П. П. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка / П. П. Забрэйко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 13–20.
2. А. В. Чернов, Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах, Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 5, 757–76.

ОДНО МНОГОМЕРНОЕ ОБОБЩЕННОЕ Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Скоромник О.В.¹, Шлапаков С.А.², Папкович М.В.¹,

¹Полоцкий государственный университет,
Блохина 29, 211440 Новополоцк, Беларусь skoromnik@gmail.com, mrapkovich@yandex.ru

²Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Московский проспект 33, 210038 Витебск, Беларусь ShlapakovSA@gmail.com

Изучается многомерное интегральное преобразование

$$(\mathbf{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\eta \int_0^\infty \mathbf{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\lambda \mathbf{x}^\gamma}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\mu f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0), \quad (1)$$

здесь [1, п.28.4;2–3] $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$; $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$, аналогично для знаков $<$, $\leq$, $\geq$; $\int_0^\infty = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$; множества $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$;

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in N_0^n$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in N_0^n$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in N_0$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in N_0$ и $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$);

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$; $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$;

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}_+^n$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$;

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $1 \leq i \leq p$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, $1 \leq j \leq q$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$, $1 \leq j \leq q$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N_0^n$ ($k_i \in N_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; для $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}$, $d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n$; $\mathbf{t}^\mu = t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$; функция

$$\mathbf{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\lambda \mathbf{x}^\gamma}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] = \prod_{k=1}^n \mathbf{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{\lambda x_k^{\gamma_k}}{t_k^{\delta_k}} \middle| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right]$$

представляет собой произведение Н-функций $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}[z]$ [4, главы 1–2]. В работе преобразование (1) изучается в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$, таких что:

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{v_n \cdot r_n - 1} \{ \dots \{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot r_2 - 1} \right. \\ \left. \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \}^{r_3/r_2} \dots \} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty,$$