Теорема. *При аппроксимации* (3) *коэффициента* (2) *уравнение* (1) *имеет обобщенные решения только в том случае, если при* $s_k < 0$ *число* $M_k = i\pi\left(1 - \frac{2m_k}{s_k}\right)$, *где* m_k – *целое, такое, что* $m_k \leq s_k$ *или* $m_k \geq 0$.

Если в уравнении (1) коэффициент Q имеет особенность только в точке 0, то обобщением такого уравнения являются системы вида

$$U' - B\frac{1}{x}U = 0, \tag{4}$$

где B – заданная постоянная матрица. Если собственные значения матрицы B целые и простые, то матрица B приводится к диагональному виду и система (4) распадается на скалярные уравнения, которые уже исследованы [1].

Литература

1. Антоневич А. Б., Кузьмина Е. В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56–66.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Х. Мазель[1], О.И.Пиндрик[2]

[1]Белорусский Государственный Университет mayamazel@gmail.com
[2]Белорусский Государственный Университет olgapindrik@gmail.com

Как известно, одним из важнейших свойств линейного ограниченного оператора является теорема о непустоте его спектра в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а также теорема об открытости резольвентного множества такого оператора. Аналогичные результаты справедливы и для обобщенных операторов, однако, уже на множестве обобщенных комплексных чисел $\mathbb{C}_*$.

Обобщенное комплексное число $\widetilde{\lambda}$ называют регулярной точкой обобщенного оператора $\widetilde{A}$, если оператор $\widetilde{\lambda}\widetilde{I}$-$\widetilde{A}$ обратим в алгебре обобщенных операторов. Множество регулярных точек называют резольвентным множеством оператора $\widetilde{A}$. Обобщенное число $\widetilde{\lambda}$, не являющееся регулярным, называют спектральным значением обобщенного оператора $\widetilde{A}$. Множество всех спектральных точек обобщенного оператора $\widetilde{A}$ называют его обобщенным спектром и обозначают $\sigma(\widetilde{A})$.

Теорема 1. Обобщенный спектр произвольного обобщенного оператора $\widetilde{A}$ является непустым подмножеством множества обобщенных комплексных чисел $\mathbb{C}_*$.

Замечание. В поле $\mathbb{C}$ обобщенный спектр обобщенного оператора $\widetilde{A}$ может быть пустым множеством.

Пример. Пусть $\widetilde{A} = [(nI)]$. Тогда в обобщенный спектр оператора $\widetilde{A}$ входят только такие числа, представители которых являются последовательностями, содержащими подпоследовательности вида (n_k). Но обобщенное число, заданное такими представителями, не является классическим комплексным числом из поля $\mathbb{C}$. Таким образом, построен пример обобщенного оператора, у которого обобщенный спектр состоит только из чисел, не лежащих в поле $\mathbb{C}$, то есть нет ни одного классического комплексного числа λ в спектре этого обобщенного оператора $\widetilde{A}$.

Теорема 2. Резольвентное множество обобщенного оператора $\widetilde{A}$ открыто.

Литература

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // ДАН СССР — 1991. — Т. 318. — С. 267—270.

2. Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. Умножение распределений и алгебры мнемофункций // СМФН — 2019. — Т. 65, выпуск 3. — С. 339—389.

3. Гулецкая О.И., Радыно Я.В. К теории обобщенных функций от операторов // Весцi АН Беларусi— 1995. — №2.

4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. - М.: Мир, 1966. - 1064 с.

5. Тильман Х.Г. Vector-valued distributions and the spectral theorem for self-adjoint operators in Hilbert spaces // Bull. Math. Soc. - 1993. — №99 — p. 67-71.

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Пономарева, О.Н. Пыжкова

Минск, Республика Беларусь

Будем рассматривать задачу типа Коши

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha}x(t) = \xi \end{cases} \tag{1}$$

с дробной производной Римана–Лиувилля D^{α} порядка α, $0 < \alpha < 1$ в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ определенных на отрезке $[0, T]$ и непрерывных на $(0, T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha}x(t)$.

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \le \mu(t) + \nu(t)\,|u|^k \qquad (0 < t \le T,\ -\infty < u < \infty), \tag{2}$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — некоторые неотрицательные функции со свойствами

$$\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds \in C_{1-\alpha}, \quad \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)\,ds \in C_{1-\alpha}, \tag{3}$$

обеспечивающими ограниченность и полную непрерывность оператора $Ax(t) = \frac{\xi\cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\,ds$ в пространстве $C_{1-\alpha}$, $k \ge 1$.

Решение задачи (1) сводится к отысканию неподвижных точек указаного оператора $Ax(t)$ (см. [1]). Но при этом явный вид решения получить непросто. Часто может быть достаточно поточечной оценки решения. Наиболее известными инструментами, позволяющими строить оценки дифференциальных уравнений, являются леммы Бихари и Гронуола-Беллмана (см., например, [2]). С помощью первой из них получим оценку решения уравнения (1) в соответствующем функциональном пространстве.

Утверждение *Пусть для функции $f(t, u)$ выполняются условия (2) и (3). Тогда для решения задачи Коши (1) выполняется оценка*

$$x(t) \le c\left[1 - (m-1)c^{m-1}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где $c = |\frac{\xi\cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds.$