Литература

1. Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988. – 256 с.

2. Frank, E. Orthogonality properties of C-fractions / E. Frank // Bull. Amer. Math. Soc. –1949 – Vol. 55, № 4. – P. 384–390.

АНАЛИЗ СТРУКТУР ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ РЕЗУЛЬТАНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ КАК ИСТОЧНИК ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Трубников Ю.В.[1], Чернявский М.М.[1]

[1]Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,
Московский 33, 2100038 Витебск, Беларусь
yurii_trubnikov@mail.ru, misha360ff@mail.ru

В XXI веке существенно возрос интерес математиков к теории точного аналитического нахождения значений кратных корней полиномов [1]. Этому поспособствовало развитие возможностей систем компьютерной математики. Так, например, исследователям стал доступен непосредственный анализ громоздких конструкций результантов и дискриминантов полиномов, а также частных производных от них, что ранее не поддавалось ручному счету.

Была установлен следующий факт [2].

Теорема. *Пусть $f = f(z)$ – полином с комплексными коэффициентами степени $n \geq 3$, а $f^{(k-1)} = f^{(k-1)}(z)$ его производная порядка $k-1$ вида*

$$f^{(k-1)}(z) = b_0 z^{n-k+1} + b_1 z^{n-k} + b_2 z^{n-k-1} + \ldots + b_{n-k} z + b_{n-k+1}.$$

Тогда корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, можно вычислить по формулам

$$z_1 = \frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_{j-1} \partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_j^k} \quad (j = 1, \ldots, n+1-k).$$

Подставляя в представленные формулы значения коэффициентов b_i $(i = 0, \ldots, n-k+1)$, выраженные через коэффициенты полинома $f(z)$, получаем конечные формулы для вычисления значения корня наивысшей кратности. Например, для алгебраического уравнения шестой степени $z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 = 0$, имеющего корень кратности $k = 4$, при $j = 2$ интересующая нас формула будет имеет вид

$$z_1 = \left(100a_1^2 a_3 a_6 - 160a_1 a_2^2 a_6 + 16a_1 a_2 a_3 a_5 - a_1 a_3^2 a_4 - 400a_1 a_4 a_6 + 624a_2 a_3 a_6 - 2000a_5 a_6 - \right.$$
$$\left. -55a_3^2 a_5\right) : \left(4\left(100a_1^2 a_2 a_6 - 10a_1^2 a_3 a_5 - 240a_1 a_3 a_6 - 160a_2^2 a_6 + 20a_2 a_3 a_5 + a_3^2 a_4 + 800a_4 a_6\right)\right).$$

В ряде случаев, когда два корня полинома фиксированной степени имеют одинаковую наивысшую кратность, анализ структур частных производных определенных порядков от дискриминанта полинома по его коэффициентам позволяет получить систему простых уравнений для вычисления этих кратных корней. Такая система существенно дополняет соотношения Виета [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Цих А.К. *Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений.* // Математический сборник. 2018. Т. 209. № 10. С. 3–30.

2. Чернявский М.М., Трубников Ю.В. *Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2021. № 1(110). С. 13–25.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Шилин А.П.[1]

[1]Белгосуниверситет, физический факультет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь a.p.shilin@gmail.com

На действительной оси $-\infty < t < \infty$ зададим H-непрерывные (т.е. удовлетворяющие условию Гельдера) комплекснозначные функции $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, f(t)$. Зададим также H-непрерывно дифференцируемые функции $p_+(t), p_R(t)$, причем функция $p_+(t)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, а функция $p_R(t)$ является действительной. Будем искать H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$ia(t)\left(p'_+(t)\operatorname{Im}\varphi(t) - p_+(t)\operatorname{Im}\varphi'(t)\right) + b(t)\operatorname{Re}\left(p'_R(t)\varphi(t) - p_R(t)\varphi'(t)\right) + \tag{1}$$

$$+\frac{a(t)p'_+(t) - b(t)p'_R(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \frac{a(t)p_+(t) - b(t)p_R(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t),\ -\infty < t < \infty,$$

в котором интеграл с $\tau - t$ понимается в смысле главного значения по Коши, а с $(\tau - t)^2$ — в смысле конечной части по Адамару. Все свойства функций, определенных на действительной оси, считаем справедливыми вплоть до бесконечно удаленной точки.

На действительной оси введем две функции

$$\Phi_+(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + i\operatorname{Im}\varphi(t),$$

$$\Psi_+(t) = p'_+(t)\Phi_+(t) - p_+(t)\Phi'_+(t), \tag{2}$$

аналитически продолжимые в верхнюю полуплоскость, и еще две действительные функции

$$\Phi_R(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \operatorname{Re}\varphi(t),$$

$$\Psi_R(t) = p'_R(t)\Phi_R(t) - p_R(t)\Phi'_R(t). \tag{3}$$

Теорема. *Решение уравнения (1) сводится к последовательному решению краевой задачи Гильберта для верхней полуплоскости*

$$\Psi_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}\Psi_R(t) + \frac{f(t)}{a(t)},\ -\infty < t < \infty, \tag{4}$$

и двух линейных дифференциальных уравнений (2), (3). В случае разрешимости уравнения (1) его решение записывается по формуле $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_R(t)$.

Доказательство теоремы основано на использовании классических и обобщенных формул Сохоцкого [1]. Задача Гильберта в постановке (4) изучена в [2]. В [3] указан неочевидный