4. Rovba, E. A. Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles / E. A. Rovba, E. G. Mikulich // Vesnik of Y. Kupala St. Univ. of Grodno. Ser. 2, Math. Phys. Inf. Comp. Technology and its Control. – 2013. – Vol. 1, iss. 148. – P. 12–20.

5. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Мат. сб. – 1971. – Т. 15б № 2. – С. 314–324.

6. Ровба, Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

О ПОСТРОЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА ОТРЕЗКЕ

bf Е.А. Ровба[1], К.А. Смотрицкий[2], Е.В. Дирвук[3]

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
[1]rovba.ea@gmail.com, [2]k_smotritski@mail.ru, [3]dirvuk@gmail.com

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории приближения функций является построение квадратурных формул интерполяционно рационального типа. В настоящем докладе представлен подход к обобщению квадратурной формулы типа Гаусса с весом $h(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$.

Пусть a_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$ — набор чисел, удовлетворяющих условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l, что $a_l = \overline{a_k}$; 3) $a_{2n-1} = a_{2n} = 0$.

В работе [1] были введены в рассмотрение алгебраические дроби

$$Q_n(x) = \frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x}}, \quad x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N},$$

где

$$\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}, \quad \mu'_{2n}(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1 + a_k x}.$$

Функция $Q_n(x)$ имеет n простых нулей на интервале $(-1, 1)$:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < 1, \quad \mu_{2n}(x_k) = \pi k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Основной результат работы состоит в следующем. Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая с весом $h(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ функция. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} h(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k) + \rho_n(f), \tag{1}$$

где C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — коэффициенты квадратурной формулы, $\rho_n(f)$ — ее остаточный член.

Теорема 1. *Квадратурная формула* (1) *имеет вид*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\, dx = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - x_k}{\lambda_{2n}(x_k)} f(x_k) + \rho_n(f).$$

Для остатка $\rho_n(f)$ получена оценка через наилучшее равномерное приближение функции f рациональными функциями порядка не выше $2n-1$ вида $p_{2n-1}(x)/\prod_{k=1}^{2n-2}(1 + a_k x)$, $p_{2n-1}(x)$ — некоторый алгебраический полином степени не выше $2n-1$. Заметим, что полученная квадратурная формула является точной для рациональных функций с полюсами первого порядка (для сравнения см. [1]).

Литература

1. Ровба Е.А. *Об одной ортогональной системе рациональных функций и квадратурах типа Гаусса* // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук, 1998, № 3. – С. 31–35.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов[1], Е.П. Кечко[1]

[1]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Пусть $f \in C_{2\pi}$, т.е. является вещественной непрерывной 2π-периодической функцией, представимой на прямой своим рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа.

Пусть параметр $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \ldots\}$. Рассмотрим семейство функций $\mathcal{H}^t = \{h_\gamma\}$, представимых в виде

$$h_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx + \cos kx}{(\gamma)_k}.$$

В данной работе рассматриваются асимптотические свойства тригонометрических аппроксимаций Паде функции f (определение таких аппроксимаций и описание их свойств см. в [1]–[4]). Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть $h_\gamma \in \mathcal{H}^t$. Тогда для любых целых неотрицательных n и m тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(z; h_\gamma) = p^t_n(x)/q^t_m(x)$, где $p^t_n(x)$, $q^t_m(x)$ – тригонометрические многочлены с действительными коэффициентами и $\deg p^t_n \leqslant n$, $\deg q^t_m \leqslant m$, существуют и равномерно по всем $x \in \mathbb{R}$ и m, $n \geq m-1$, при $n \to \infty$*

$$h_\gamma - \pi^t_{n,m}(z; h_\gamma) = \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\left\{(1-i)e^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1}(1+o(1))\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $h_\gamma \in \mathcal{H}^t$. Тогда если $m(n) = o(n)$, то равномерно по всем m, $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \to \infty$*

$$R^t_{n,m}(h_\gamma) \sim ||h_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot; h_\gamma)|| \sim \frac{\sqrt{2}\, m!\, |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Равномерно по всем m, $n \geq m-1$ и $n \to \infty$

$$R^t_{n,m}(h_\gamma) \asymp ||h_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot; h_\gamma)|| \asymp \frac{\sqrt{2}\, m!\, |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Литература