НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА БЕРГМАНА В ОБЛАСТИ

Мардвилко Т.С.[1], **Пекарский А.А.**[2]

[1]Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь mardvilko@mail.ru

[2]Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь pekarskii@gmail.com

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, граница которой ∂G является жордановой кривой. Для $z \in G$ введём $\rho(z) = \rho(z, \partial G) = \min\{|z-\xi| : \xi \in \partial G\}$ — расстояние точки z до границы ∂G. Через m_2 обозначим плоскую меру Лебега в $\mathbb{C}$. Для положительных p и μ введём $A_{p,\mu}(G)$ — пространство Бергмана аналитических в G функций, т.е. $f \in A_{p,\mu}(G)$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{A_{p,\mu}(G)} = \left(\int_G |f(z)|^p \rho^{p\mu-1}(z) dm_2(z) \right)^{1/p}.$$

Далее введём $B^\alpha_\tau(G)$ — пространство Бесова аналитических в G функций. Именно, $f \in B^\alpha_\tau(G)(0 < \tau < \infty, \alpha \in \mathbb{R})$, если f аналитична в G и

$$\|f\|_{B^\alpha_\tau(G)} = \|f^{(s)}\|_{A_{\tau,s-\alpha}(G)} < \infty, \; s = [\alpha] + 1,$$

где $[\alpha]$ — целая часть α. Здесь, как обычно, $f^{(0)} = f$, $f^{(s)}$ при $s \geq 1$ — это s−я производная f, а $f^{(s)}$ при $s < 0$ — это $(-s)$-я первообразная функции f. В случае $s < 0$ в определении $B^\alpha_\tau(G)$ предпологается, что $f^{(-1)}(z_0) = f^{(-2)}(z_0) = \ldots = f^{(-s)}(z_0) = 0$ в некоторой фиксированной точке $z_0 \in G$.

Рассматриваемая задача существенно зависит от границы ∂G. Мы будем преполагать, что ∂G является кривой Лаврентьева, т. е. ∂G спрямляема и существует постоянная $\varkappa = \varkappa(\partial G) > 0$ такая, что для любых точек $\xi_1, \xi_2 \in \partial G$ длина наименьшей из двух дуг ∂G, соединяющих ξ_1 и ξ_2, не превышает $\varkappa|\xi_1 - \xi_2|$.

Теорема. Пусть G — ограниченная область, граница которой является кривой Лаврентьева, p и μ — положительные числа такие, что $\mu + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$. Тогда для $\alpha > -\mu$, $\frac{1}{\tau} = \alpha + \mu + \frac{1}{p}$ и r — рациональной функции степени не выше $n, n \geq 1$, из $A_{p,\mu}(G)$ выполняется неравенство

$$\|r\|_{B^\alpha_\tau(G)} \leq cn^{\alpha+\mu} \|r\|_{A_{p,\mu}(G)},$$

где $c > 0$ и не зависит от n и r.

Ранее теорема 1 была известна для круга, полуплоскости и, в некоторых частных случаях, для области, см. [1 – 3].

Литература

1. Dyn'kin E. *Rational functions in Bergman spaces. Operator Theory: Advances and Applications* V. 113. Birkhauser Verlag Basel, Switzerland, 2000. P. 76-94

2. Мисюк В.Р. *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры.* // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси, Т. 9. 2001. С. 105-108.

3. Мардвилко Т.С. *Неравенство для квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер и его приложения.* Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. No. 1. 2010. P. 41–48.