

О СОВПАДЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ТИПА ГЕГЕНБАУЭРА

Г. Н. Казимиров

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины grigory.kazimirov@gmail.com

Найден класс функций, на котором совпадают обобщённые модули гладкости, определяемые при помощи оператора обобщённого сдвига и в которых разности берутся с разным и одинаковым шагом. Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f , что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Для $\nu > -\frac{1}{2}$ определим оператор обобщённого сдвига $T_h(f, x, \nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^1 f(x \cos h + y \sqrt{1-x^2} \sin h) (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy$, где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy$. Введём обозначения ($r = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x, \nu) &= T_h(f, x, \nu) - f(x), \\ \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x, \nu) &= \Delta_{h_1}^1(\Delta_{h_2, \dots, h_{r-1}}^{r-1}(f, x, \nu)), \\ \tilde{\omega}_r(f, \delta, \nu)_{p,\alpha,\beta} &= \sup_{|h_i| \leq \delta, i=1, \dots, r} \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x, \nu)\|_{p,\alpha,\beta}, \\ \Delta_h^r(f, x, \nu) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}(f, x, \nu), x, \nu), \\ \omega_r(f, \delta, \nu)_{p,\alpha,\beta} &= \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^r(f, x, \nu)\|_{p,\alpha,\beta} \end{aligned}$$

Обозначим через $\Lambda_{p,\alpha,\beta}^1$ класс функций $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ таких, что $\Delta_h^1(f, x, \nu) = h(x)g(t)$ для любого $x \in [-1, 1]$, и любого $t \in [-\pi, \pi]$, где $h \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\sup_{|t| \leq \pi} |g(t)| < +\infty$. Будем говорить, что $f \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}^k$ ($k = 2, 3, \dots$), если $\Delta_h^1(f, x, \nu) = h(x)g(t)$, где $h \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}^{k-1}$ и функция g одна и та же во всех классах $\Lambda_{p,\alpha,\beta}^l$ ($l = 1, 2, 3, \dots, k$).

Теорема 1. Пусть даны числа p, ν, k такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > -\frac{1}{2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $-\frac{1}{2} < \alpha \leq \nu$ и $-\frac{1}{2} < \beta \leq \nu$ при $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \nu + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < \nu + \frac{1}{2}$ при $p = 1$, $-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ и $-\frac{1}{2p} < \beta < \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \nu + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < \nu + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$. Тогда для $f \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}^k$ справедливо равенство: $\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \omega_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}$

СОПРЯЖЁННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Н.Ю. Козловская¹, Е.А. Ровба²

¹Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь, kozlowskaya_natalya@tut.by

²Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь, rovba.ea@gmail.com

Рассмотрим систему рациональных функций Такенаки-Мальмквиста [1]

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\bar{\alpha}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z},$$

$$\alpha_k \in \mathbb{C}, \quad \alpha_0 = 0, \quad |\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем в рассмотрение следующую систему функций

$$\varphi_0(z) = 1, \operatorname{Re} \varphi_1(z), \operatorname{Im} \varphi_1(z), \operatorname{Re} \varphi_2(z), \operatorname{Im} \varphi_2(z), \dots, \operatorname{Re} \varphi_n(z), \operatorname{Im} \varphi_n(z), \dots \quad (1)$$

Лемма 1. Функции $\operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ являются тригонометрическими рациональными функциями порядка n .

Лемма 2. Система тригонометрических функций (1) ортогональна на единичной окружности.

Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$. Рассмотрим ряд

$$f(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix}) + b_n \operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})), \quad (2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Re} \varphi_n(e^{it}) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Im} \varphi_n(e^{it}) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-b_n \operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix}) + a_n \operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})) \quad (3)$$

естественно называть сопряжённым с рядом (2) [2].

Запишем n -ую частичную сумму сопряжённого ряда Фурье (3)

$$\overline{S}_n(x, f) = \sum_{k=1}^n (-b_k \operatorname{Re} \varphi_k(e^{ix}) + a_k \operatorname{Im} \varphi_k(e^{ix})).$$

Теорема 1. Для частичной суммы $\overline{S}_n(x, f)$ ряда (3) справедливо представление

$$\overline{S}_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{D}_n(x, t) dt,$$

где

$$\overline{D}(x, t) = \frac{1}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \left(\cos \frac{x-t}{2} - \cos \lambda_n^+(x, t) \right) -$$

сопряжённое ядро Дирихле,

$$\lambda_n^+(x, t) = \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2} \right) du, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Литература

1. Джрбашян М. М. *К теории рядов Фурье по рациональным функциям* // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.
2. Китбальян А. А. *Разложения по обобщенным тригонометрическим системам* // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956. Т. 16, № 6. С. 3–24.