СВОЙСТВО ФАТУ ДЛЯ СВЕРТОК СО СТЕПЕНЯМИ ЯДЕР ПУАССОНА В ШАРЕ

Г.А. Карагулян[1], И.Н. Катковская[2], В.Г. Кротов[3]

[1]Институт математики НАН Армении, пр. Маршала Баграмяна 24/5, 0019 Ереван, Армения
g.karagulyan@gmail.com
[2,3]Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
krotov@bsu.by

Пусть $S := \{\theta \in \mathbb{R}^n : |\theta| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, σ — поверхностная мера Лебега на S, нормированная условием $\sigma(S) = 1$, $d(\theta, \xi) = |\theta - \xi|$ — евклидова метрика на S.

Мы находим необходимые и достаточные условия того, что для каждой функции $f \in L^p(S)$, $1 \leq p < \infty$, нормированная свертка со степенью ядра Пуассона

$$\mathcal{P}_l f(x) = \frac{P_l f(x)}{P_l 1(x)}, \quad P_l f(x) = \int_S \left[\frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n}\right]^{l + \frac{n-1}{n}} f(\xi)\, d\sigma(\xi), \quad |x| < 1,$$

для σ-почти всех $\theta \in S$ имеет предел вдоль областей

$$D_\lambda(\theta) = \{x : |x - \theta| < \lambda(1 - |x|)\}.$$

Здесь $\lambda : (0, 1] \to (0, 1]$, $\lambda(+0) = 0$ — возрастающая функция, задающая геометрию $D_\lambda(\theta)$.

Эти условия таковы:

$$\lambda(t) = O\left(t\right), \quad \text{при} \quad l > 0,\ p \geq 1;$$

$$\lambda(t) = O\left(t \left[\log \frac{2}{t}\right]^{\dfrac{p}{n-1}}\right), \quad \text{при} \quad l = 0,\ p \geq 1;$$

$$\lambda(t) = O\left(t^{1 + \frac{lnp}{n-1}}\right), \quad \text{при} \quad -\frac{n-1}{np} < l < 0,\ p \geq 1;$$

$$\lambda(t) = O\left(\left[\log \frac{2}{t}\right]^{-\frac{p-1}{n-1}}\right), \quad \text{при} \quad l = -\frac{n-1}{np},\ p > 1.$$

В остальных случаях $\mathcal{P}_l f$ непрерывно продолжается на S.

Аналогичный вопрос полностью решен также для инвариантного ядра Пуассона в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. Эти примеры являются иллюстрацией наших более общих результатов. Предшествующие работы в этом направлении указаны ниже.

Литература

1. Sjögren P. *Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique* // Lect. Notes in Math. 1984. V. 1096. P. 544–548.

2. Rönning J.-O. *Convergence results for the square root of the Poisson kernel* // Math. Scand. 1997. V. 81. P. 219–235.

3. Катковская И. Н.,Кротов В. Г. *О касательном граничном поведении потенциалов* // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 1999. Т. 2 . С. 63–72.

4. Катковская И. Н.,Кротов В. Г. *Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона* // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 4. С. 580–591.

5. Karagulyan G. A., Safaryan M. H. *Generalizations of Fatou's Theorem for the Integrals with General Kernels* // J. Geom. Anal. 2014. V. 25, № 3. P. 1459–1475.

6. Safaryan M. H. *On Generalizations of Fatou's Theorem in Lp for Convolution Integrals with General Kernels* // J. Geom. Anal. 2021. V. 31, № 4. P. 3280–3299.