БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. С. Коваленко М. Н. Василевич
В. И. Яшкин

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по естественно-научному образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям
1-31 05 01 «Химия (по направлениям)»,
1-31 05 02 «Химия лекарственных соединений»,
1-31 05 03 «Химия высоких энергий»,
1-31 05 04 «Фундаментальная химия»

МИНСК
БГУ
2021

УДК 51(075.8)(076.5)
ББК 22.1я73-5
К56

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *И. В. Белько*;
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Беняш-Кривец*;
кандидат физико-математических наук, доцент *В. М. Метельский*

Коваленко, Н. С.
К56 Практикум по высшей математике для студентов химических специальностей : учеб.-метод. пособие / Н. С. Коваленко, М. Н. Василевич, В. И. Яшкин. – Минск : БГУ, 2021. – 279 с.
ISBN 978-985-881-052-8.

Учебно-методическое пособие является элементом учебно-методического комплекса математического цикла для студентов химических специальностей. Рассматриваются теоретико-множественные и логические операции, элементы комбинаторики, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

Для студентов, обучающихся по специальностям 1-31 05 01 «Химия (по направлениям)», 1-31 05 02 «Химия лекарственных соединений», 1-31 05 03 «Химия высоких энергий», 1-31 05 04 «Фундаментальная химия».

УДК 51(075.8)(076.5)
ББК 22.1я73-5

ISBN 978-985-881-052-8

© БГУ, 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с действующей типовой учебной программой по дисциплине «Высшая математика», которая преподается на химическом факультете Белорусского государственного университета. Оно является элементом учебного комплекса математического цикла для студентов химических специальностей и содержит разделы, посвященные теоретико-множественным и логическим операциям, элементам комбинаторики, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. В начале каждой главы даются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач; далее приводятся типовые примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельного решения с ответами, а также задачи для контрольных работ. Особое внимание уделено задачам и примерам. Приведенный теоретический материал не является исчерпывающим, а отражает только те вопросы данной темы, на которые следует обратить внимание студентов-химиков при подготовке. Полный справочный материал содержится в изданиях, указанных в библиографическом списке.

Для освоения курса высшей математики важна самостоятельная работа студентов. Поэтому в учебно-методическом пособии авторы стремились оказать помощь студентам в овладении методами решения задач по курсу высшей математики, привести достаточное число упражнений для выработки навыков решения типовых задач, подобрать задачи, способствующие разъяснению основных математических понятий и их взаимосвязи с химическими и физико-химическими процессами. Это и определило структуру издания.

Учебно-методическое пособие может быть использовано студентами химических, химико-технологических и инженерно-технических специальностей вузов всех форм обучения при подготовке к практическим заня-

тиям, выполнении контрольных работ и индивидуальных заданий, а также преподавателями при проведении практических занятий и организации самостоятельной работы студентов.

Авторы глубоко благодарны рецензентам книги: заведующему кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору Беняшу-Кривцу Валерию Вацлавовичу; профессору кафедры высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета, доктору физико-математических наук, профессору Белько Ивану Васильевичу; доценту кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, кандидату физико-математических наук, доценту Метельскому Василию Михайловичу за ценные замечания.

Искреннюю благодарность авторы выражают профессору кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета доктору педагогических наук, профессору Мельникову Олегу Исидоровичу, а также декану механико-математического факультета Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук Босякову Сергею Михайловичу.

Глава 1

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

***Учебная задача*:** ввести основные понятия теоретико-множественного подхода в современной математике; дать понятие «множество»; операции над множествами; важные числовые множества; основные формулы комбинаторики.

***Литература*:** [3], [8].

1.1. Множества, операции над множествами

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к числу первичных.

Под *множеством* будем понимать совокупность объектов, объединенных по какому-либо признаку. Слова «совокупность», «набор», «система», «объединение» и другие являются синонимами слова «множество». Например, можно говорить о множестве студентов в группе, множестве учебников в библиотеке, множестве целых чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать как конечное, так и бесконечное число объектов некоторой природы. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Принадлежность элемента a множеству A обозначают следующим образом: $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то пишут: $b \notin A$. Если $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – некоторые элементы множества A, то запись $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ означает, что A состоит из элементов $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Определение. Множество A называется *подмножеством множества* B, если все элементы множества A являются одновременно и элементами множества B.

Обозначение: $A \subset B$ или $B \supset A$, читается: «множество A содержится в множестве B» или «множество B содержит множество A».

Например, можно рассматривать {Li, Na, K} как подмножество {H, Li, Na, K, Rb, Cs, Fr} в первой группе периодической системы элементов.

Определение. Два множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. выполняются условия $A \subset B$ и $B \subset A$, и обозначаются: $A = B$.

Определение. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

Пустое множество является подмножеством *любого* множества.

1.1.1. Операция объединения множеств

Операции на множествах начнем изучать с помощью универсального множества $U = \{1, 2, ..., 12\}$, применяя диаграммы Эйлера – Венна. Традиционно U изображается на диаграммах прямоугольником, другие множества – кругами, при этом имеет значение взаимное расположение кругов и не имеют значения их относительные размеры.

На примере множества $U = \{1, 2, ..., 12\}$ *объединением множеств* $A = \{1, 2, 3, 4\} \subset U$ и $B = \{1, 5, 6\} \subset U$ называется множество $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где $\cup$ – символ объединения множеств (рис. 1.1).

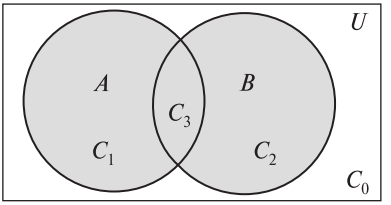


Рис. 1.1

Таким образом, объединением охватываются три множества C_1, C_2 и C_3, которые закрашены (см. рис. 1.1) .

Сформулируем определение объединения множеств для общего случая.

Определение. *Объединением множеств* A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из двух данных множеств, т. е. $C = A \cup B = \left\{ x \middle| \left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in B \end{array} \right. \right\}$.

1.1.2. Логические переменные. Таблица истинности

Традиционно в логике вместо одной *предметной переменной* x, принимающей, например, для значений 1, 2, ..., 12 множества U, удобно для элементов множества A и B ввести две *логические переменные* a и b. Областью определения *логической переменной* являются два *логических значения*: 1 – *истина* и 0 – *ложь*.

Приведем примеры, поясняющие рис. 1.1 с точки зрения логических переменных.

Элемент множества C_0 не принадлежит ни множеству A, ни множеству B, поэтому логические значения для элементов множества C_0 будут $a = 0$ и $b = 0$.

Элементы C_1 принадлежат A и не принадлежат B, поэтому $a = 1$ и $b = 0$.

Элементы C_2 не принадлежат A и принадлежат B, для них $a = 0$ и $b = 1$.

Элементы C_3 принадлежат как A, так и B, для них $a = 1$ и $b = 1$.

Теперь объединение множеств можно рассматривать как *логическую операцию*, или *логическую функцию*, от двух логических аргументов.

Определение. *Логическая операция*, или *логическая функция*, она же *логическая связка*, – это функция логических переменных, значением которой является логическое значение.

Табличный вид логической функции называет*ся таблицей истинности*.

Логически операция объединения двух множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *или* 2-му множеству. То, что x принадлежит A или B или им обоим, выражается формулой

$$x \in A \cup B \text{ то же, что } (x \in A) \vee (x \in B),$$

где $\vee$ – символ логической операции, которая называется *дизъюнкцией*, которая также называется *логической связкой «или»*.

Обратите внимание, что логическая связка *«или»* относится именно к *свойствам* какого-то объекта x: объект x обладает свойствами A *или* свойствами B. Логические функции удобно задавать в обычном табличном виде значения аргументов – значение функции.

Учитывая, что объединение множеств $A \cup B$ состоит из трех множеств C_1, C_2 и C_3, запишем операцию объединения множеств в табличном виде (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Таблица истинности дизъюнкции

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция – логическая функция двух аргументов. *Дизъюнкция* равна 0 тогда и только тогда, когда оба логических аргумента равны 0.

Обратите внимание на то, что между таблицей истинности и диаграммой Эйлера – Венна существует взаимно однозначное соответствие, для этого сравните табл. 1.1 и рис. 1.1:

1) число единиц в последнем столбце совпадает с числом закрашенных областей на диаграмме;

2) четыре комбинации логических переменных a и b отвечают четырем областям C_0, C_1, C_2 и C_3.

1.1.3. Операция пересечения множеств

На примере множества $U = \{1, 2, ..., 12\}$ *пересечением множеств* A и B называется множество $A \cap B$, содержащее элементы, входящие сразу в оба множества: $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 5, 6\} = \{1\} = C_3$, где $\cap$ – символ пересечения множеств (рис. 1.2).

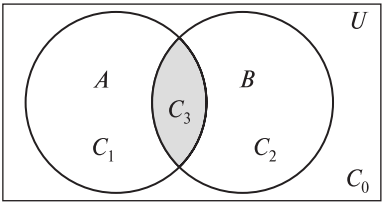


Рис. 1.2

Пересечение представляет множество C_3, закрашенное на диаграмме (см. рис. 1.2).

Определение. *Пересечением множеств* A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как A, так и множеству B, т. е. $C = A \cap B = \left\{ x \middle| \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases} \right\}$.

Обозначение пересечения множеств A и B: $A \cap B$.

Например, в первой группе периодической системы элементов пересечением множества {Na, K} с множеством {Li, Na, Rb, Fr} является множество {Na}.

Логически операция пересечения двух множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *и* 2-му множеству, т. е. $x \in A \cap B$ то же самое, что $(x \in A) \wedge (x \in B)$, или $(x \in A)$ & $(x \in B)$, где $\wedge$ или & – символ *логической связки «и»*, которая также называется *конъюнкцией*.

Логическая связка «*и*» относится именно к *свойствам* какого-то объекта *x*: объект *x* обладает свойствами *A и B*.

Таблица 1.2

Таблица истинности конъюнкции

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция – логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 1.2. Конъюнкция равна 1 тогда и только тогда, когда обе логические переменные равны 1.

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера – Венна существует взаимно однозначное соответствие (сравните табл. 1.2 и рис. 1.2):

1) число единиц в последнем столбце равно числу закрашенных областей;

2) четыре комбинации логических переменных *a* и *b* отвечают четырем областям C_0, C_1, C_2 и C_3.

1.1.4. Операция дополнения множеств

На примере множества $U = \{1, 2, ..., 12\}$ *дополнением множества A* называется множество $\overline{A}$, содержащее элементы, не входящие во множество *A* (рис. 1.3): $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_0 \cup C_2$, где «$\overline{\ }$» – символ дополнения множества.

Дополнение состоит из множеств C_1 и C_2, закрашенных на диаграмме (см. рис. 1.3).

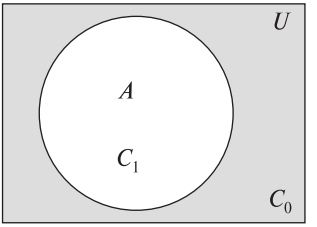


Рис. 1.3

Определение. *Дополнение множества A* обозначается $\overline{A}$ и содержит те и только те элементы множества *U*, которых нет в *A*.

Таким образом, все элементы, которые не принадлежат множеству *A*, образуют множество $\overline{A}$ в *E*, $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Логически операция дополнения множества характеризуется так: элемент *не* принадлежит множеству.

То, что *x* не принадлежит множеству *A*, записывается следующим образом:

$$x \in \overline{A} \text{ то же самое, что } \neg(x \in A),$$

где «¬» – символ *логической связки* «*не*», которая называется *отрицанием*.

Логическая связка «*не*» относится именно к *свойствам* какого-то объекта *x*: объект *x не* обладает свойством *A*.

Отрицание – логическая функция одного аргумента с таблицей истинности 1.3. Эту таблицу очень легко запомнить: значение функции противоположно значению аргумента.

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера – Венна существует взаимно однозначное соответствие (сравните табл. 1.3 и рис. 1.3):

1) число единиц в последнем столбце совпадает с числом закрашенных областей на диаграмме;

2) две комбинации логической переменной a отвечают двум областям C_0 и C_1.

Таблица 1.3

Таблица истинности отрицания

a	$\neg a$
0	1
1	0

1.1.5. Операция разности множеств

Разность множеств A и B – множество $A \setminus B$, содержащее элементы, входящие в A и не входящие в B (рис. 1.4): $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 5, 6\} = \{2, 3, 4\} = C_1$.

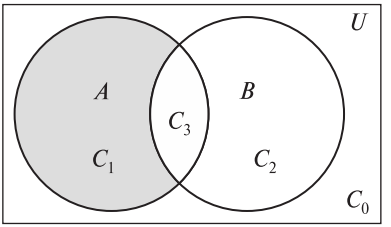


Рис. 1.4

Другими словами, *разность множеств* A и B содержит элементы A без элементов B. Рассмотрим операцию разности множеств с логической точки зрения.

Определение. *Разностью множеств* A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т. е. $C = A \setminus B = \left\{ x \,\middle|\, \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases} \right\}$.

Логически операция разности множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *и не* принадлежит 2-му множеству:

$x \in A \setminus B$ то же самое, что $(x \in A) \setminus (x \in B)$.

Разность – логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 1.4, которую легко запомнить: разность равна 1 тогда и только тогда, когда 1-я логическая переменная равна 1, а 2-я логическая переменная – 0.

Таблица 1.4

Таблица истинности разности

a	b	$a \setminus b$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1.1.6. Операция симметрической разности множеств

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, содержащее элементы, входящие в A и не входящие в B, и элементы, входящие в B и не входящие в A, т. е. объединение обеих разностей (рис. 1.5): $A \Delta B = \{1, 2, 3, 4\} \Delta \{1, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} = C_1 \cup C_2$.

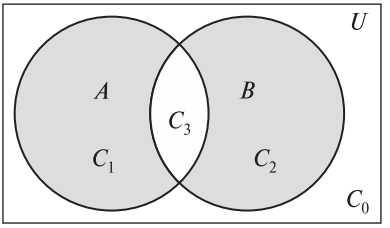


Рис. 1.5

Логически операция симметрической разности множеств характеризуется так: элемент принадлежит или только 1-му множеству, или только 2-му множеству:

$$x \in A \Delta B \text{ то же, что } (x \in A) \Delta (x \in B),$$

где Δ – символ *логической связки, исключающее «или»* или *разделяющее «или»*.

Исключающее «или» – логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 1.5, которую легко запомнить: исключающее «или» равно 1 тогда и только тогда, когда логические переменные имеют разные значения.

Таблица 1.5

Таблица истинности исключающего «или»

a	b	$a \Delta b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логическая связка *исключающее «или»* относится к *свойствам* какого-то объекта x: объект x обладает свойствами *либо* A, *либо* B. Но не теми и другими. В этом состоит отличие исключающего «или» от обычного, или включающего, или соединяющего «или».

1.1.7. Операция эквивалентности множеств

Эквивалентностью множеств A и B называется множество $A \sim B$, содержащее элементы, входящие либо и в A, и в B, либо не входящие ни в A, ни в B, т. е. эквивалентность множеств совпадает с дополнением симметрической разности (рис. 1.6): $A \sim B = \{1, 2, 3, 4\} \sim \{1, 5, 6\} = \{1, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_0 \cup C_3$.

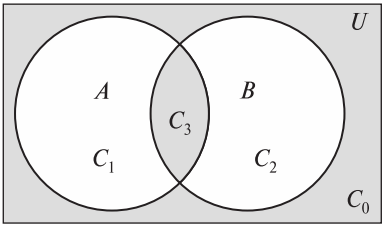


Рис. 1.6

Таблица 1.6

Таблица истинности эквивалентности

a	b	$a \sim b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Изучим операцию эквивалентности множеств с логической точки зрения. Логически операция эквивалентности множеств характеризуется так: элемент или принадлежит обоим множествам, или не принадлежит им:

$$x \in A \sim B \text{ то же самое, что } (x \in A) \sim (x \in B)$$
$$\text{или } (x \in A) \leftrightarrow (x \in B),$$

где ~ или $\leftrightarrow$ – символ *логической связки* «*тогда и только тогда*» или «*если и только если*», которая называется *эквивалентностью*.

Эквивалентность – логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 1.6, которую легко запомнить: эквивалентность равна 1 тогда и только тогда, когда логические переменные имеют равные значения.

Эквивалентность противоположна исключающему «или»: там, где одна связка равна 1, другая – 0, и наоборот.

1.1.8. Операция импликации множеств

Импликацией множеств A и B называется множество $A \to B$, содержащее все элементы, входящие в B и не входящие в A, т. е. импликация множеств совпадает с дополнением разности (рис. 1.7): $A \to B = \{1, 2, 3, 4\} \to \to \{1, 5, 6\} = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_0 \cup C_2 \cup C_3$.

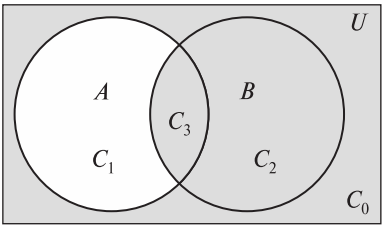


Рис. 1.7

Логически операция импликации множеств характеризуется так: элемент не принадлежит только 1-му множеству A без 2-го множества:

$$x \in A \to B \text{ то же самое, что } (x \in A) \to (x \in B),$$

где $\to$ – символ *логической связки «если..., то»*, которая называется *импликацией*.

Импликация – логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 1.7, которую легко запомнить: импликация равна 0 тогда и только тогда, когда 1-я логическая переменная равна 1, а 2-я – 0 (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Таблица истинности эквивалентности

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация противоположна разности: там, где одна связка равна 1, другая равна 0, и наоборот.

1.1.9. Основные законы теоретико-множественных и логических операций

Выпишем основные теоретико-множественные и логические законы и соотношения и будем записывать их сразу на двух языках: сначала на языке теории множеств, затем на языке логики.

1. *Законы идемпотентности:*

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A;$$
$$a \vee a = a,\ a \wedge a = a.$$

2. *Законы коммутативности:*

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = A \cap B;$$
$$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a.$$

3. *Законы ассоциативности:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

4. *Законы дистрибутивности:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \vee (a \vee c),\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

5. *Законы нуля и единицы:*

$$A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing,\ A \cap A = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup U = U,\ A \cup \varnothing = A;$$
$$a \vee \neg a = 1,\ a \wedge \neg a = 0,\ a \wedge 1 = a,\ a \wedge 0 = 0,\ a \vee 1 = 1,\ a \vee 0 = a.$$

6. *Законы де Моргана:*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,\ \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$$

7. *Обобщенные законы де Моргана:*

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C},\ \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C};$$
$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c,\ \neg(a \wedge b \wedge c) = \neg a \vee \neg b \vee \neg c.$$

8. *Заокн двойного отрицания:*

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

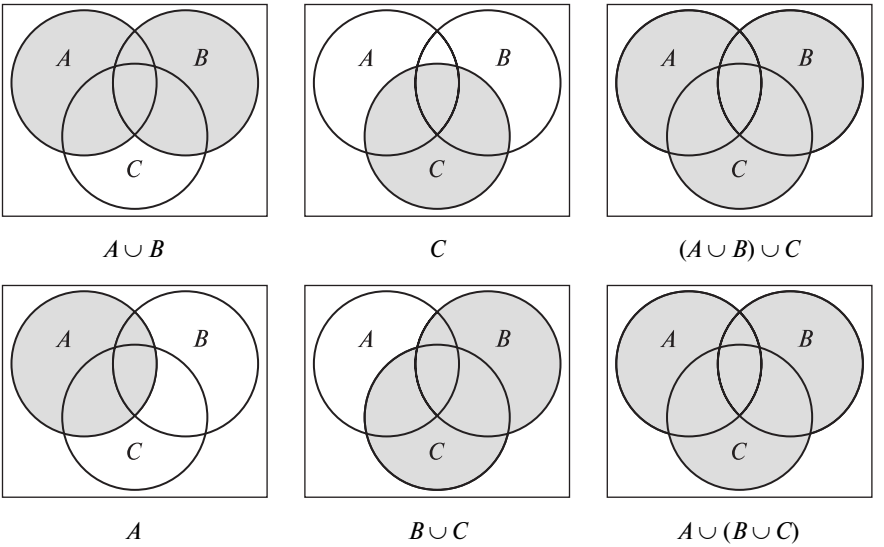


Рис. 1.8

Например, на рис. 1.8 сверху расположены три диаграммы Эйлера – Венна для множеств $A \cup B$, C и $(A \cup B) \cup C$; ниже – диаграммы для множеств A, $B \cup C$ и $A \cup (B \cup C)$. Множества $(A \cup B) \cup C$ и $A \cup (B \cup C)$ равны.

1.2. Основные числовые множества

На *множестве натуральных чисел* $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ определены следующие операции:

1) сложение $a + b$;
2) умножение $a \cdot b$.

Вычитание $a - b$ определяется для множества **N** лишь в случае, когда $a > b$. Для того чтобы ввести операцию деления $a : b$, используют так называемую формулу деления с остатком:

$$a = b \cdot q + r,$$

где a – делимое; b – делитель; q – частное; r – остаток и $a > b$, $r < b$.

1.2.1. Аксиомы Пеано

1. Число 1 является натуральным числом.

2. Число, следующее за натуральным, тоже является натуральным.

3. Число 1 не следует ни за каким натуральным числом.

4. Если натуральное число a непосредственно следует как за числом b, так и за числом c, то b и c тождественны.

5. (Аксиома индукции.) Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Из аксиомы 5 следуют *свойства упорядоченности* множества натуральных чисел:

1) $n > m$, если $n = m + k$, где k – натуральное число;

2) каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Множество всех натуральных чисел, меньших или равных некоторому натуральному числу n, часто записывают в виде $\overline{1,n}$.

Множество, которое можно «пересчитать» за конечное число шагов, называется *конечным*. Пустое множество также считается конечным множеством.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Счетное множество – бесконечное множество, для элементов которого можно указать такой способ нумерации при помощи множества натуральных чисел, при котором каждый элемент множества получит свой единственный номер.

Множество целых чисел **Z** можно построить, добавив к **N** число ноль «0» и противоположные (отрицательные) к n числа «$-n$». Тогда целыми числами называются все числа вида n, $-n$ и 0, где n – натуральное число.

Вводя в рассмотрение операцию «деление», мы переходим к еще более широкому *множеству рациональных чисел* **Q**, которое состоит из чисел, которые можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$ – числитель, $n \in \mathbf{N}$ – знаменатель.

Все пары вида (m; 1) отождествляются с целыми числами $m \in \mathbf{Z}$.

Иррациональное число – это число, которое не может быть представлено в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. Иррациональные числа представляют собой бесконечные непериодические десятичные дроби. Последнее принимается за определение иррационального числа. Множество иррациональных чисел часто обозначают буквой $\boldsymbol{J}$.

Примеры иррациональных чисел: $\lg 3$, $\sqrt{5}$, π, e.

Множество *действительных чисел* – объединение множества рациональных и иррациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается через $\mathbf{R} = (-\infty; \infty)$. Действительные числа можно записать в виде конечной или бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби.

Приведем примеры действительных чисел: 0; 6; 458; 1863; 0,578; –38; $5\sqrt{26}$; 0,145(3); $\log_3 512$.

Ноль также является действительным числом. Согласно определению существуют как положительные, так и отрицательные действительные числа. Ноль является единственным действительным числом, которое не положительно и не отрицательно.

Еще одно название для действительных чисел – вещественные числа. Эти числа позволяют описывать значение непрерывно меняющейся величины без введения эталонного (единичного) ее значения на числовой прямой.

$\mathbf{R}^2 = (-\infty; \infty)(-\infty; \infty)$ является множеством всевозможных упорядоченных пар (x; y) действительных чисел, где $x \in (-\infty; \infty)$, $y \in (-\infty; \infty)$.

$\mathbf{R}^3 = (-\infty; \infty)(-\infty; \infty)(-\infty; \infty)$ – множество всевозможных упорядоченных множеств (x; y; z) действительных чисел, где $x \in (-\infty; \infty)$, $y \in (-\infty; \infty)$, $z \in (-\infty; \infty)$.

$\mathbf{R}^n = \underbrace{(-\infty; \infty)(-\infty; \infty)\ldots(-\infty; \infty)}_{n \text{ раз}}$ – множество, каждый элемент которого – упорядоченное множество (x_1; ...; x_n) действительных чисел $x_k \in (-\infty; \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1.2.2. Множество комплексных чисел

Простое квадратное уравнение с параметром

$$x^2 = a$$

решается в $\mathbf{R}$ не всегда. Формальное решение

$$x = \pm\sqrt{a}$$

существует лишь для $a \geq 0$. При отрицательных значениях параметра a решений в **R** нет.

Расширение множества действительных чисел **R** до множества ***комплексных чисел*** **C** осуществляется введением *мнимой единицы* i: $i^2 = -1$. Множество **C** состоит из всех упорядоченных пар $z = (x; y)$ действительных чисел. Первое число x из такой пары называется *вещественной* (*действительной*) *частью* и обозначается $x = \operatorname{Re} z$; второе число – *мнимой частью* $y = \operatorname{Im} z$.

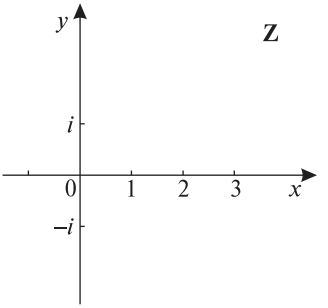


Рис. 1.9

Множество комплексных чисел $(x; 0)$ задает действительную ось, а множество комплексных чисел $(0; y)$ задает мнимую ось (рис. 1.9).

Два элемента z_1 и z_2 равны ($z_1 = z_2$), если равны их вещественные и мнимые части:

$$z_1 = z_2, \text{ если } \{\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2,\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\}.$$

Сложение двух комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ и ***умножение*** числа $z = (x; y)$ *на действительное число* α определим по правилам:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;

2) $\alpha \cdot z = (\alpha x; \alpha y)$.

Верны равенства:

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + y \cdot (0; 1) = x + iy.$$

Представление комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Для операции *умножения двух комплексных чисел* логично сохранить все свойства умножения действительных чисел. Поэтому

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Для определения операции *деления* предварительно введем понятие *комплексно-сопряженного числа* $\overline{z} = x - iy$, с геометрической точки зрения представляющее собой точку, симметричную к z относительно действительной оси (рис. 1.10). Для комплексно-сопряженных чисел справедливо равенство

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

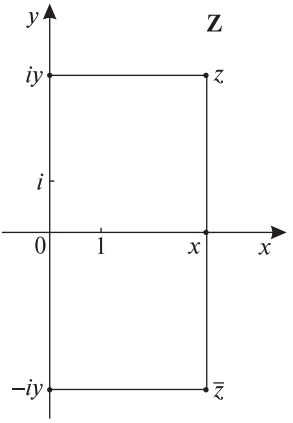


Рис. 1.10

Чтобы задать *деление* комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на $z_2 = x_2 + iy_2$, нужно домножить числитель и знаменатель дроби на комплексно-сопряженное к знаменателю число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \ z_2 \neq (0;0).$$

Таким образом, на множестве комплексных чисел **C** заданы все четыре арифметические операции. Для множества всех действительных чисел $x = (x;\ 0)$ введенные операции совпадают с аналогичными в **R**. Кроме того, произвольное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет в **C** два корня (с учетом кратности):

1) $D = b^2 - 4ac > 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

2) $D = 0$: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$;

3) $D < 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$ – два комплексно-сопряженных корня.

Другими формами записи комплексных чисел являются *тригонометрическая* и *экспоненциальная*. В данной системе точка характеризуется не абсциссой и ординатой, а своим расстоянием r до начала координат и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и направляющим лучом из начала координат в эту точку. Проекции отрезка на координатные оси равны произведению длины на косинус соответствующего угла (рис. 1.11).

Модулем (абсолютной величиной) комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости (или, что то же самое, расстояние от точки комплексной плоскости до начала координат). Модуль комплексного числа $z = x + iy$ обозначается $|z|$ (иногда r или ρ) и определяется выражением

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

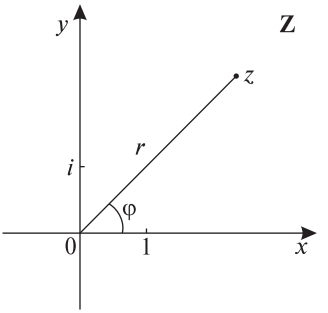


Рис. 1.11

Если z является вещественным числом, то $|z|$ совпадает с абсолютной величиной этого числа в вещественном понимании термина.

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и направляющим лучом из начала координат через эту точку называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = \arg z$.

Очевидно, что для всякого комплексного числа $z = x + iy$ (см. рис. 1.11) справедливы формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

где главное значение аргумента $\varphi = \arg z$ *удовлетворяет следующим условиям:* $-\pi < \arg z \le \pi$ или $0 \le \arg z < 2\pi$.

Откуда и получаем тригонометрическую и экспоненциальную форму записи комплексного числа:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где r — *модуль* комплексного числа, φ — его *аргумент*, e — математическая константа, приближенно равная 2,71828.

Формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

называется формулой Эйлера. Названа в честь Леонарда Эйлера. Она связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

Замечание. Заметим, что $z\bar{z} = r^2$.

Пусть заданы два комплексных числа в экспоненциальной форме: $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Формулы умножения и деления Муавра:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{1.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},\ z_2 \ne 0. \tag{1.2}$$

Формула возведения в натуральную степень n имеет вид

$$z^n = r^n \left(\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)\right) = r^n e^{in\varphi}. \tag{1.3}$$

Формула для вычисления корней n-й степени из ненулевого комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},\ k = \overline{0, n-1}. \tag{1.4}$$

Это значит, что корни n-й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют и их количество равно n. На комплексной плоскости все эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Вершины n-угольника имеют полярные координаты $\left(\sqrt[n]{r},\ \dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$.

Пример 1.1. Вычислить $(1+i)^2(\sqrt{3}-i)^3$ в тригонометрической форме.

Решение. Представим множители в тригонометрической форме:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Обратим внимание на то, что знак «минус» во втором множителе внесен под тригонометрические функции с помощью формул приведения. Далее по формуле (2) имеем

$$(1+i)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^3=2^3\left(\cos\left(-3\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-3\frac{\pi}{6}\right)\right)=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Теперь по формуле (1.1) получаем

$$(1+i)^2\left(\sqrt{3}-i\right)^3=2\cdot 8(\cos 0+i\sin 0)=16.$$

Ответ: 16.

Замечание. Операции сравнения «<» и «>» не определены на множестве комплексных чисел **C**.

Для рассмотренных числовых множеств можно составить следующую цепочку вложений:

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

Каждое из множеств не только содержит все числа из предыдущих, но и расширяет наши возможности по их использованию.

1.2.3. Применение комплексных чисел в расчете физических величин

Представление векторных физических величин комплексными числами облегчает выполнение расчетов этих величин. При этом действия над векторами, которые выполняются графическим путем, заменяются соот-

ветствующими действиями над комплексными числами, что значительно проще.

Особенно широкое применение комплексные числа получили в электротехнике при расчете электрических цепей.

Пример 1.2. На рис. 1.12 дана векторная диаграмма неразветвленной цепи переменного тока. Вектор $\overrightarrow{OM}$ представляет вектор напряжения $\vec{u}_1$, модуль которого $|\vec{u}_1| = 220$ (В); вектор $\overrightarrow{ON}$ представляет вектор напряжения $\vec{u}_2$, модуль которого $|\vec{u}_2| = 127$ (В). Требуется найти: вектор напряжения $\vec{u}_1$, вектор напряжения $\vec{u}_2$, напряжение на зажимах электрической цепи, составленной из двух включенных участков с напряжениями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

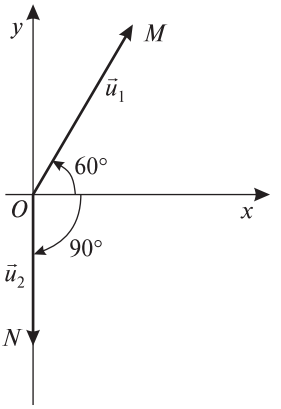


Рис. 1.12

Решение. Найдем векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 = 220(\cos 60° + i\sin 60°) = 110 + 190{,}5i;$$

$$\vec{u}_2 = 127(\cos(-90°) + i\sin(-90°)) = -127i.$$

Если электрическая цепь составлена из двух включенных участков с напряжениями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, то на зажимах будем иметь напряжение

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 110 + 190{,}5i - 127i = 110 + 63{,}5i.$$

Ответ: $\vec{u}_1 = 110 + 190{,}5i$; $\vec{u}_2 = -127i$; $\vec{u} = 110 + 63{,}5i$.

Аналогично применяются комплексные числа при выражении других характеристик электрических цепей.

1.3. Основные формулы комбинаторики

В математике и ее приложениях часто приходится использовать некоторые формулы *комбинаторики* – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов данного конечного множества. Определим основные формулы комбинаторики, которые будут нужны в дальнейшем.

Рассмотрим *схему выбора без возвращений*.

Факториал натурального числа n – произведение первых n натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n.$$

Полагают, что $0! = 1$.

Перестановки P_n из n элементов данного множества – это комбинации, составленные из элементов данного множества, отличающиеся только порядком расположения элементов. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!.$$

Пример 1.3. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Решение. $P_7 = 7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Ответ: 5040 различных списков.

Размещения – комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Пример 1.4. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Решение. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Ответ: 720 различных вариантов пьедестала почета.

Сочетания – неупорядоченные подмножества из m элементов множества, содержащего n различных элементов (т. е. наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.5. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Решение. В отличие от предыдущего примера здесь не важен порядок финалистов, следовательно, найдем число сочетаний из 10 по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

Ответ: 120 различных троек финалистов.

Отметим, что число перестановок, размещений и сочетаний связано равенством $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Далее рассмотрим перестановки, размещения и сочетания с повторениями.

1.3.1. Перестановки с повторениями

Перестановки из повторяющихся элементов называются *перестановками с повторением*.

Количество перестановок с повторениями из n предметов обозначаются $\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_k)$, где k – количество видов различных предметов, n_1, n_2, ..., n_k – количество предметов вида 1, 2, ..., k, причем, разумеется, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Количество ***перестановок с повторениями*** из n предметов, где количество различных предметов k, а одинаковых предметов n_1, n_2, ..., n_k, причем $n_1 + n_2 +... + n_k = n$,

$$\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdots P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Пример 1.6. Сколькими способами располагаются по порядку 6 букв А, Б, Б и В, В, В?

Решение. Нам нужно подсчитать количество перестановок с повторением $P(1, 2, 3)$. Общее количество букв $n = 1 + 2 + 3 = 6$.

Если бы все буквы были разными, то получили бы просто перестановки в количестве

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6.$$

Но у нас три одинаковые буквы В. Возникает вопрос: сколько набегает дополнительных перестановок, когда эти три буквы расположены на одних и тех же местах? Поскольку при подсчете мы предполагали, что эти три буквы В различны, то, когда они на одних и тех же местах, их можно упорядочить

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

способами. Это количество дополнительных перестановок для буквы В *для всех случаев их размещения*! Чтобы учесть одинаковость букв В, нужно P_6 поделить на P_3. Аналогично получаем для буквы Б $P_2 = 2! = 1 \cdot 2$ лишних перестановок. Чтобы учесть одинаковость букв Б, нужно P_6 поделить на P_2. Для буквы А получаем одну дополнительную перестановку – лишних перестановок нет.

Итак, количество разных упорядочений 6 букв А, Б, Б и В, В, В, т. е. их перестановок с повторениями,

$$\overline{P}(1, 2, 3) = \frac{P_6}{P_3 \cdot P_2 \cdot P_1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$$

Ответ: 60 способов.

Пример 1.7. Сколько различных 9-значных чисел можно составить из 9 цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3?

Решение. Всего у нас 9 чисел. Поэтому без учета повторений предметов получаем 9! чисел.

Но в наборе имеется три числа, каждое из которых повторяется три раза. Следовательно, для получения правильного ответа задачи необходимо полученное ранее количество перестановок без повторений 9! поделить три раза на 3!:

$$P(3,\ 3,\ 3)=\frac{P_9}{P_3\cdot P_3\cdot P_3}=\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=1680.$$

Ответ: 1680 чисел.

1.3.2. Размещения с повторениями

Ранее величина нашей выборки k, т. е. количество выбранных элементов, *не превосходила* числа самих предметов n. Рассмотрим размещения из n различных элементов, при которых количество элементов любого из n видов *неограниченно*. Другими словами, из n элементов выбирается произвольное количество k элементов, естественно, что при этом элементы могут повторяться.

Размещение с повторением – это выбор k элементов из n, причем количество элементов любого из n видов неограниченно. Количество размещений с повторением также называется *размещением с повторением*.

Следует иметь в виду, что размещение с повторением стоит особняком в рассматриваемых расстановках: *при его вычислении используется степенная функция*, *а не факториал*!

Приведем теорему, которая обобщает полученные в примерах результаты.

Количество ***размещений с повторениями*** из n по m равно n^m и обозначается $\bar{A}_n^m=n^m$.

Пример 1.8. Сколько существует семизначных чисел?

Решение. На 1-е место можно поставить одну из 10 цифр.

При каждой из них на 2-м месте может оказаться любая из 10 цифр.

И так далее до 7 цифр в числе.

Имеем $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^7$ различных чисел.

Ответ: 10^7.

Пример 1.9. Сколько существует 20-значных чисел?

Решение. Количество различных 20-значных чисел (см. пример 1.8.) равно 10^{20}.

Ответ: 10^{20}.

Однако задачи, приведенные в примерах выше, обычно трактуются в более сложной интерпретации. А именно:

Пример 1.10. Сколько существует семизначных чисел, не начинающихся с нуля?

Решение. Заметим, что вторая часть условия задачи может опускаться. В этом случае имеет смысл решить сразу две задачи:

1) найти все числа, которые могут начинаться с нуля;

2) найти все числа, которые не могут начинаться с нуля.

Очевидно, что требование к числу не начинаться с нулей эквивалентно условию, чтобы число не начиналось с одного 0. В этом случае на 1-м месте может быть только одна из 9 цифр, отличных от 0. А уже на остальных 6 местах могут находиться все 10 цифр. Ясно, что по правилу прямого произведения следует умножить 9 на количество 6-значных чисел. Получается

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$$

различных чисел.

Ответ: $9 \cdot 10^6$.

Под *расстановкой* будем понимать расположение предметов в разном порядке.

Схема расстановок

1. Если предметы переставляются, переходим на 2, если выбираются – на 3.

2. Если предметы повторяются, подсчитываем количество перестановок, если не повторяются – количество перестановок с повторением.

3. Если порядок есть – переходим на 4, если нет – на 5.

4. Если предметы повторяются, подсчитываем количество размещений, если не повторяются – количество размещений с повторением.

5. Если предметы повторяются, подсчитываем количество сочетаний, если не повторяются – количество сочетаний с повторением (рис. 1.13).

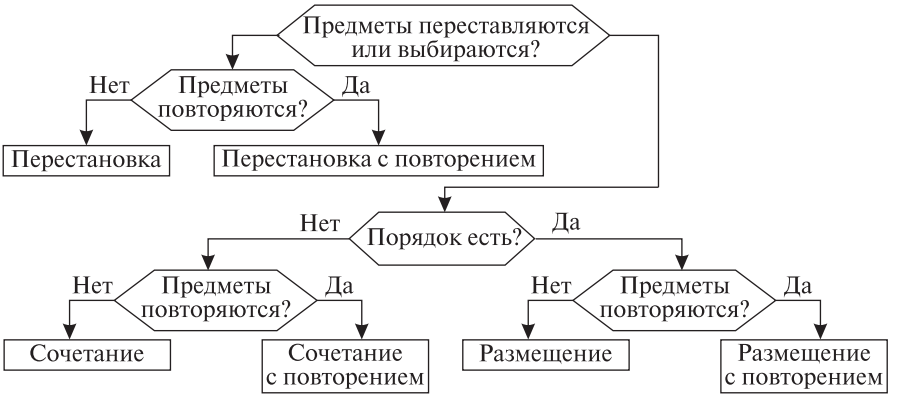


Рис. 1.13

Пример 1.11. Сколькими способами можно расположить по порядку 3 буквы А, Б и В?

Решение. На первое место можно поставить одну из 3 букв, имеем 3 способа:

А**, Б**, В**,

где звездочками обозначены неизвестные буквы. В каждом из этих трех случаев на второе место можно поставить одну из двух оставшихся букв, всего $3 \cdot 2 = 6$ способов:

АБ*, АВ*, БА*, БВ*, ВА*, ВБ*.

В каждом из этих 6 случаев на оставшееся место можно поставить только одну букву: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов:

АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА.

Ответ: 6 способов.

Пример 1.12. Сколько пятизначных чисел можно составить из 5 цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

Решение. На первое место можно поставить одну из 5 цифр, имеем 5 чисел:

1****, 2****, 3****, 4****, 5****.

В каждом из этих 5 случаев на второе место можно поставить одну из четырех оставшихся цифр, имеем $5 \cdot 4 = 20$ чисел.

В каждом из этих 20 случаев на третье место можно поставить одну из трех оставшихся цифр, имеем $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

Аналогичные рассуждения справедливы для четвертой и пятой цифры. Всего получаем $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ чисел.

Ответ: 120 чисел.

Пример 1.13. Сколькими способами размещаются по порядку 3 буквы из 5: А, Б, В, Г, Д?

Решение. Алгоритм подсчета числа размещений совпадает с алгоритмом подсчета числа перестановок без повторений.

На первое место можно поставить одну из пяти букв, имеем 5 способов:

А**, Б**, В**, Г**, Д**,

где звездочками обозначены неизвестные буквы. В каждом из этих пяти случаев на второе место можно поставить одну из четырех оставшихся букв, имеем по теореме о прямом произведении $5 \cdot 4 = 20$ способов:

АБ*, АВ*, АГ*, АД*,
БА*, БВ*, БГ*, БД*.

ВА*, ВБ*, ВГ*, ВД*,
ГА*, ГБ*, ГВ*, ГД*,
ДА*, ДБ*, ДВ*, ДГ*.

Наконец, в каждом из этих 20 случаев на оставшееся место можно поставить одну из трех оставшихся букв, имеем $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов:

АБВ, АБГ, АБД, АВБ, АВГ, АВД, АГБ, АГВ, АГД, АДБ, АДВ, АДГ,
БАВ, БАГ, БАД, БВА, БВГ, БВД, БГА, БГВ, БГД, БДА, БДВ, БДГ,
ВАБ, ВАГ, ВАД, ВБА, ВБГ, ВБД, ВГА, ВГБ, ВГД, ВДА, ВДБ, ВДГ,
ГАБ, ГАВ, ГАД, ГБА, ГБВ, ГБД, ГВА, ГВБ, ГВД, ГДА, ГДБ, ГДВ,
ДАБ, ДАВ, ДАГ, ДБА, ДБВ, ДБГ, ДВА, ДВБ, ДВГ, ДГА, ДГБ, ДГВ.

Ответ: 60.

Пример 1.14. Сколько 4-значных чисел можно составить из 7 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

Решение. Получаем $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ чисел.

Ответ: 840 чисел.

Пример 1.15. Найти количество сочетаний 3 букв из 5: А, Б, В, Г, Д.

Решение. Алгоритм подсчета числа сочетаний аналогичен алгоритму подсчета числа перестановок с повторениями.

Если бы порядок учитывался, то имели бы размещения из 5 по 3: A_5^3.

Но порядок не учитывается. Возникает вопрос: сколько набегает дополнительных размещений при перестановке одних и тех же трех букв? Три буквы можно упорядочить P_3 способами.

Итак, количество разных сочетаний 3 букв из 5 равно

$$\frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Пример 1.16. Сколькими способами 4 цифры можно выбрать из 7 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

Решение. С учетом порядка 4 цифры из 7 можно выбрать A_7^4 способами, а без учета порядка, что и имеется, конечно, в виду в условии данной задачи, $\frac{A_7^4}{P_4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 5 = 35$ способами.

Наиболее трудное в подобных задачах – определить, нужно ли учитывать порядок размещений. Другими словами, что нужно подсчитывать – размещения или сочетания?

Треугольник Паскаля

Первые слева числа *треугольника Паскаля* равны 1, крайние числа справа также равны 1, а внутренние числа равны сумме ближайших двух чисел сверху и сверху слева из предыдущего ряда, как изображено на рис. 1.14.

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^9	C_n^{10}
1	1	1									
2	1	2	1								
2	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	4	5	10	10	5	1					
6	4	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Рис. 1.14

При $n = 1$ получаем 2 сочетания. Поскольку числа маленькие, просто выпишем наиболее короткие формулы:

$$C_1^0 = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1,\ C_1^1 = \frac{1!}{1! \cdot 1!} = 1.$$

При $n = 2$ получаем 3 сочетания:

$$C_2^0 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 1,\ C_2^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2,\ C_2^2 = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1.$$

При $n = 3$ получаем 4 сочетания:

$$C_3^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1,\ C_3^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3,\ C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3,\ C_3^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1.$$

При $n = 4$ получаем 5 сочетаний:

$$C_4^0 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1,\ C_4^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4,\ C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6,\ C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4,\ C_4^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1.$$

1.3.3. Связь перестановок с повторением и сочетаний

Как связаны перестановки $P_n = n!$ и размещения A_n^m, мы уже знаем:

$$A_n^n = P_n = n!$$

Теперь посмотрим, как связаны перестановки с повторением и сочетания. Для этого решим примеры, рассмотренные для перестановок с повторением, другим способом (задачи для самостоятельного решения 1.6–1.14).

Тест

1. Операция объединения множеств

1.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}$?
1) $\{1\}$;
2) $\{1, 2\}$;
3) $\{1, 2, 3\}$;
4) $\{1, 2, 3, 4\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{3, 3, 3\}$?
1) $\{1\}$;
2) $\{1, 2\}$;
3) $\{1, 2, 3\}$;
4) $\{1, 2, 3, 4\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$?
1) $\{1\}$;
2) $\{1, 2\}$;
3) $\{1, 2, 3\}$;
4) $\{1, 2, 3, 4\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.4. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{2, 2, 2\}$?
1) $\{1\}$;
2) $\{1, 2\}$;
3) $\{1, 2, 3\}$;
4) $\{1, 2, 3, 4\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \cup \{1, 1, 1\}$?
1) $\{1\}$;
2) $\{1, 2\}$;
3) $\{1, 2, 3\}$;
4) $\{1, 2, 3, 4\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Операция пересечения множеств

2.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cap \{1, 1, 2\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cap \{3, 4, 5\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.4. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \cap \{1, 1, 1\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Операция дополнения множества

3.1. Чему равно дополнение $\{5, 5, 6\}$ до $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

3.2. Чему равно дополнение $\{3, 4, 5, 6\}$ до $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

3.3. Чему равно дополнение $\{6, 5, 4\}$ до $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

3.4. Чему равно дополнение $\{6, 5, 5\}$ до $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

3.5. Чему равно дополнение $\{5, 5, 6, 4\}$ до $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4. Операция разности множеств

4.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5, 6\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \setminus \{1, 1, 2\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.3. Чему равно {1, 2, 2} \ {3, 4, 5}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

4.4. Чему равно {1, 2, 3} \ {2, 2, 3}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

4.5. Чему равно {1, 1, 1} \ {1, 1, 1}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

5. Операция симметрической разности множеств

5.1. Чему равно {1, 2, 3} Δ {4, 4, 4}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

5.2. Чему равно {1, 4, 4} Δ {2, 3, 4}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

5.3. Чему равно {1, 2, 2} Δ {2, 2, 2}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

5.4. Чему равно {1, 2, 3} Δ {1, 2, 3}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

5.5. Чему равно {1, 1, 1} Δ {1, 1, 1}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

6. Операция эквивалентности множеств

6.1. Чему равно {1, 2, 3} ~ {4, 4, 4}, если U = {1, 2, 3, 4}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

6.2. Чему равно {1, 4, 4} ~ {2, 3, 1}, если U = {1, 2, 3, 4}?
1) ∅;
2) {1};
3) {1, 2};
4) {1, 2, 3};
5) {1, 2, 3, 4}.

6.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \sim \{2, 2, 1\}$, если $U = \{1, 2, 3, 4\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.4. Чему равно $\{1, 2, 3\} \sim \{1, 2, 3\}$, если $U = \{1, 2, 3, 4\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \sim \{1, 1, 1\}$, если $U = \{1, 2, 3, 4\}$?
1) $\varnothing$;
2) $\{1\}$;
3) $\{1, 2\}$;
4) $\{1, 2, 3\}$;
5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

7. Операции над множествами и импликация множеств

7.1. Чему равно $A \cup B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) $\{2, 2, 3, 3\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{4, 5\}$;
4) $\{1, 2, 3, 5\}$;
5) $\{2, 3, 4, 5\}$.

7.2. Чему равно $A \cap B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) $\{2, 2, 3, 3\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{4, 5\}$;
4) $\{1, 2, 3, 5\}$;
5) $\{2, 3, 4, 5\}$.

7.3. Чему равно $\neg A$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) $\{2, 2, 3, 3\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{4, 5\}$;
4) $\{1, 2, 3, 5\}$;
5) $\{2, 3, 4, 5\}$.

7.4. Чему равно $A \to B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) $\{2, 2, 3, 3\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{4, 5\}$;
4) $\{1, 2, 3, 5\}$;
5) $\{2, 3, 4, 5\}$.

7.5. Чему равно $B \to A$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) $\{2, 2, 3, 3\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{4, 5\}$;
4) $\{1, 2, 3, 5\}$;
5) $\{2, 3, 4, 5\}$.

8. Основные законы

8.1. Какой закон является законом идемпотентности?

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.2. Какой закон является законом коммутативности?

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.3. Какой закон является законом ассоциативности?

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.4. Какой закон является законом дистрибутивности?

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.5. Какой закон является законом де Моргана?

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

9. Дополнительные соотношения

9.1. Какое соотношение связывает разность с пересечением и дополнением?

1) $A \to B = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)}$;
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$;
5) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9.2. Какое соотношение связывает симметрическую разность с объединением и разностью?

1) $A \to B = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)}$;
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$;
5) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9.3. Какое соотношение связывает эквивалентность с дополнением и симметрической разностью?

1) $A \to B = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)}$;
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$;
5) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9.4. Какое соотношение связывает эквивалентность с пересечением и импликацией?

1) $A \to B = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)}$;
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$;
5) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9.5. Какое соотношение связывает импликацию с объединением и дополнением?

1) $A \to B = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)}$;
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$;
5) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнительные вопросы по тесту

Пусть n – номер варианта теста от 1 до 9. Докажите двумя способами:
а) с помощью диаграмм Эйлера – Венна;
б) с помощью таблиц истинности.
Для вариантов 1 и 9: второй закон ассоциативности.
Для вариантов 2 и 10: первый закон дистрибутивности.
Для вариантов 3 и 9: второй закон дистрибутивности.
Для вариантов 4 и 9: первый закон де Моргана.
Для вариантов 5 и 9: второй закон де Моргана.
Для варианта 6: первый обобщенный закон де Моргана.
Для вариантов 7 и 8: второй обобщенный закон де Моргана.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить все значения корней уравнений:

а) $x^2 + x + 8 = 0$;
б) $2x^2 - x + 3 = 0$;
в) $x^2 + 2x + 10 = 0$;
г) $(z^8 - 13z^4 + 12)^2 = 0$;
д) $z^3 - 8 = 0$;
е) $z^4 + 4 = 0$;
ж) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

1.2. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = -5$; б) $z = 5i$; в) $z = 5 - 5i$.

1.3. Записать в тригонометрической и алгебраической форме результаты возведения в заданную степень:

а) $z = i^7$;
б) $z = i^{18}$;
в) $z = (3i - 7)^2$;
г) $z = (13 + i)^3$.

1.4. Выполнить указанные действия:

а) $\dfrac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2}$, если $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = 1 + i,\ z_3 = 7 - 9i$; в) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

б) $\dfrac{z_1 + z_2 z_3}{z_2}$, если $z_1 = 4 + 8i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = 9 + 13i$;

1.5. Выполнить указанные действия:

а) $(1-i)^6$; в) $(1+2i)^6$; д) $\sqrt[6]{-1}$.

б) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$; г) $\sqrt[3]{i}$;

1.6. Записать все перестановки для множеств:

а) {1, 2}; б) {0, 2, 3}.

1.7. Сколько существует шестизначных чисел?

1.8. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из 9 цифр: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3?

1.9. Найти количество сочетаний 4 букв из 6: А, Б, В, Г, Д, Е.

1.10. Подсчитать количество перестановок $P(10)$.

1.11. Имеется 5 черных, 3 красных и 4 белых кубика. Кубики каждого цвета одинаковые. Сколькими способами можно расположить все кубики в один ряд?

1.12. Вдоль велодорожки в один ряд высадили рассаду 200 цветов: тюльпанов и нарциссов. Известно, число растений между любыми двумя тюльпанами не равно 6. Какое наибольшее число тюльпанов может быть среди высаженных 200 растений?

1.13. Найти все натуральные n и k, при которых число $A=\dfrac{(nk)!}{(n!)^k\,k!}$ является целым.

1.14. Записать для действительных чисел a и b выводы формул возведения в натуральную степень:

а) $(a+b)^n$; б) $(a+ib)^n$.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

***Учебная задача*:** определение понятия матрицы; действия над матрицами; определитель матрицы и его свойства; обратная матрица; ранг матрицы; изучение методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

***Литература*:** [1–2], [4], [8], [10–15].

2.1. Матрицы и операции над ними

Определение. *Матрицей A* размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица A, образованная из $m \cdot n$ элементов некоторого множества и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \qquad (2.1)$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) – элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Если $m = n$, матрица A называется *квадратной порядка n*.

Для квадратной матрицы *порядка n* сумма $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A$ называется *следом матрицы A*.

Если $m = 1$, $j > 1$, матрицу A называют *матрицей-строкой*, если $n = 1$, $i > 1$, то A называют *матрицей-столбцом*.

Если все элементы a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) матрицы A – числа, то матрицу A называют *числовой*.

Если все элементы матрицы A равны нулю, ее называют *нулевой* и обозначают буквой O.

2.1.1. Виды матриц

Определение. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные выше (ниже) диагонали, равны нулю, т. е. выполняются соотношения

$$a_{ij} = 0,\ i < j,\ j = 2, 3, ..., n,\ i = 2, 3, ..., j - 1$$

$$(a_{ij} = 0,\ i > j,\ j = 1, 2, 3, ..., i - 1,\ i = 1, 2, ..., m).$$

Определение. Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 1$, называется *единичной* и обозначается буквой E.

Определение. Прямоугольная матрица $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ называется *ступенчатой*, если первыми ненулевыми элементами ее первых r строк, $r \leq m$, являются либо элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}, либо первые ненулевые элементы, лежащие правее их, при этом первый ненулевой элемент каждой из строк лежит правее первого ненулевого элемента предшествующей строки в записи матрицы A. Кроме этого, при $r < m$ все строки ступенчатой матрицы, начиная с $(r + 1)$-й, являются нулевыми, т. е. все их элементы равны нулю.

Если первые ненулевые элементы первых r строк матрицы A обозначить

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{k-1j_{k-1}},\ a_{kj_k}, \ldots, a_{r-1j_{r-1}}, a_{rj_r},$$

то в силу приведенного определения должны выполняться соотношения

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} < j_k < \ldots j_{r-1} < j_r,\ j_k \geq k\ \ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Как правило, полагают $j_1 = 1$. При выполнении указанных условий ступенчатая матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}
\mathbf{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j_2-1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k-1} & a_{1j_k} & \dots & a_{1j_r-1} & a_{1j_r} & \dots & a_{1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}_{2j_2} & \dots & a_{2j_k-1} & a_{2j_k} & \dots & a_{2j_r-1} & a_{2j_r} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}_{kj_k} & \dots & a_{kj_r-1} & a_{kj_r} & \dots & a_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}.$$

В записи матрицы A первые ненулевые элементы ее первых r строк выделены жирным шрифтом и называются ступенчатыми.

Определение. Ступенчатая матрица называется *трапециевидной*, если $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ – первые ненулевые элементы ее первых r строк.

Частным случаем трапециевидных матриц являются верхнетреугольные матрицы с ненулевыми диагональными элементами. Ниже приводятся примеры ступенчатой, трапециевидной, верхнетреугольной и диагональной матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В теории и на практике находят применение так называемые симметрические матрицы.

Определение. Квадратная матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ порядка n называется *симметрической*, если ее элементы, расположенные симметрично относительно диагонали, равны, т. е. если для ее элементов справедливы соотношения

$$a_{ij}=a_{ji},\ i=2,\ 3,\ \dots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ i-1.$$

Две матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{k\times \ell}$ считаются равными, если совпадают их размерности и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$m=k,\ n=\ell,\ a_{ij}=b_{ij},\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n.$$

2.1.2. Действия над матрицами

Сложение и вычитание матриц одной размерности:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножение матрицы на число α:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = A\alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

$$A + B = B + A;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$1 \cdot A = A;$$

$$0 \cdot A = O.$$

Пример 2.1. Даны матрицы A и B. Найти сумму матриц $A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+6 & 6+4 & 1+9 \\ 4-1 & -3+1 & 2-2 \\ 0+4 & 1+2 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Пример 2.2. Найти произведение матрицы A на число α.

$$\alpha = 3;\ A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\alpha \cdot A = 3\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 6 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3(-1) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$

Определение. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Определение. *Произведением матрицы* $A_{m\times p}$ *на матрицу* $B_{p\times n}$ называется матрица $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$, где элементы

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{sj}. \qquad (2.2)$$

Таким образом, чтобы получить элемент матрицы C, стоящий в i-й строке и j-м столбце, умножают элементы i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения складывают.

Произведение матриц имеет смысл только для согласованных матриц. Не всегда $AB = BA$.

Если для матриц A и B выполняется равенство

$$AB = BA,$$

они называются *перестановочными* (или *коммутативными*).

Операции умножения матриц (если они определены) обладают следующими свойствами:

$$(A + B)C = AC + BC;$$

$$A(BC) = (AB)C;$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Для квадратных матриц одного порядка справедливы равенства

$$O \cdot A = O,$$

$$AE = EA = A.$$

Пример 2.3. Доказать, что для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ имеет место соотношение $AB \neq BA$.

Решение. Вычисляя произведения AB и BA по формулам (2.2)

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2)+3\cdot0\\ 4\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot2 & 4\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -4\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot4 & 1\cdot2+(-1)\cdot0 & 1\cdot3+(-1)\cdot(-1)\\ 0\cdot1+(-2)\cdot4 & 0\cdot2+(-2)\cdot0 & 0\cdot3+(-2)\cdot(-1)\\ 2\cdot1+0\cdot4 & 2\cdot2+0\cdot0 & 2\cdot3+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ -8 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix},$$

убеждаемся в том, что $AB \neq BA$.

Пример 2.4. Доказать, что для матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{pmatrix}$ справедливы равенства $AB = BA$.

Решение. Вычисляя по формуле (2.2) произведения

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3b+1\cdot b & 2\cdot(-b)+1\cdot2b\\ (-1)\cdot3b+3\cdot b & (-1)\cdot(-b)+3\cdot2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7b & 0\\ 0 & 7b\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b\cdot2+(-b)\cdot(-1) & 3b\cdot1+(-b)\cdot3\\ b\cdot2+2b\cdot(-1) & b\cdot1+2b\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7b & 0\\ 0 & 7b\end{pmatrix},$$

убеждаемся в справедливости равенства $AB = BA$ для указанных матриц.

Определение. Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой строк столбцами с теми же номерами и сохранением порядка следования элементов, называется *транспонированной*.

Для симметрических матриц $A^T = A$.

Важной числовой характеристикой квадратных матриц является понятие определителя, или детерминанта, матриц.

2.2. Определитель матрицы

Пусть задана матрица $A=(a_{11})$ размерности 1×1.

Определение. Выражение

$$\det A=|a_{11}|=a_{11}$$

называется ***определителем*** (или ***детерминантом***) матрицы A первого порядка.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\det A$, $|A|$, Δ.

Определение. Выражение

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

называется ***определителем*** матрицы A второго порядка.

Пример 2.5. Вычислить определитель квадратной матрицы порядка 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1(-3) = 8 + 3 = 11.$$

Ответ: $\Delta = 11$.

Пусть задана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ размерности 3×3.

Определение. Выражение

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

называется *определителем* матрицы A третьего порядка.

Схема вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}.$$

Модификация схемы вычисления определителей третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример 2.6. Вычислить определитель матрицы размерности 3×3 по правилу треугольника.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0(-2)(-6) + (-1)\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 5 - (4(-2)2 + 3(-1)(-6) + 0\cdot 1\cdot 5) =$$

$$= 0 - 4 + 30 - (-16 + 18 + 0) = 26 - 2 = 24.$$

Ответ: $\det A = 24$.

Определение. *Минором k-го порядка* M_k матрицы A, состоящей из m строк и n столбцов, называется определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, находящихся на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A $\left(k \le \min\{m, n\}\right)$.

Из определения следует, что миноров первого порядка у матрицы A столько, сколько у нее элементов.

Определение. Дополнительным минором или минором m_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученный из данной матрицы A удалением i-й строки и j-го столбца, содержащих данный элемент.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, где m_{ij} – минор.

Применив принцип математической индукции, можно дать определение детерминанта матрицы A порядка n:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \text{ или } \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

где уже определен определитель матрицы $(n-1)$-го порядка.

Пример 2.7. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{11} матрицы A размерности

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Алгебраическое дополнение к элементу $a_{11} = 4$ $A_{11} = (-1)^{1+1} m_{11}$, где m_{11} – минор к элементу a_{11}, т. е. определитель третьего порядка, полученный из определителя матрицы четвертого порядка

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

вычеркиванием первой строки и первого столбца $m_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Тогда алгебраическое дополнение к элементу a_{11}

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 2)) =$$
$$= 0 - 12 - 1 - (-3 - 12 + 0) = -13 + 15 = 2.$$

Ответ: $A_{11} = 2$.

Определитель матрицы A размерности $n \times n$ может быть вычислен *методом разложения определителя* по элементам i-й строки $\det A =$ $= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, либо по элементам j-го столбца $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Свойства определителей

1. $\det A = \det A^T$.

Следующие свойства будут сформулированы применительно к строкам матрицы, хотя они верны и относительно ее столбцов.

2. Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, то определитель поменяет знак.

4. Если в определителе две строки одинаковые, то определитель равен нулю.

5. Умножение всех элементов строки определителя на число $\beta \in \mathbf{R}$ равносильно умножению самого определителя на β.

6. Если две строки определителя пропорциональны, то его значение равно 0.

7. Если каждый из элементов строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Если к данной строке определителя прибавить соответствующие элементы другой строки определителя, умноженные на любое число, то определитель не изменится.

9. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

10. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, где A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка.

11. (Теорема аннулирования.) Сумма произведений элементов a_{ij} i-й строки на алгебраические дополнения A_{kj} соответствующих элементов k-й строки равна нулю, т. е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0,\ i \neq k.$

Методы вычисления определителей *n*-го порядка. Первый метод, называемый разложением определителя по строке (столбцу), базируется на теореме Лапласа, которая утверждает, что *определитель квадратной матрицы* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.*

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{ik} A_{ik} + \ldots + a_{in} A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \qquad (2.3)$$

где i – номер строки, $1 \le i \le n$. Формула (2.3) называется *разложением определителя по i-й строке*. Аналогичная формула верна для любого j-го столбца:

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{kj} A_{kj} + \ldots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj},\ 1 \le j \le n, \quad (2.4)$$

которая называется *разложением определителя по j-му столбцу*.

Использование формул (2.3) или (2.4) сводит вычисление определителя матрицы n-го порядка к вычислению в худшем случае n определителей матрицы $(n - 1)$-го порядка.

Наиболее эффективным методом является *метод сведения определителя квадратной матрицы к верхнетреугольной (нижнетреугольной)* с использованием свойств определителей.

Пример 2.8. Вычислить определитель нижнетреугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение. Применяя последовательно формулу (2.3), получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} a_{33} = a_{11} a_{22} a_{33}.$$

Таким образом, определитель нижнетреугольной матрицы третьего порядка равен произведению ее диагональных элементов.

Ответ: $\det A = a_{11} a_{22} a_{33}$.

Замечание. Правило вычисления определителей нижнетреугольных матриц третьего порядка применимо к вычислению нижнетреугольных, верхнетреугольных и диагональных матриц любого порядка.

Для вычисления определителей квадратных матриц $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у которых все элементы, расположенные выше (ниже) побочной диагонали равны нулю, справедлива формула

$$\det A = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot a_{1n} \cdot a_{2n-1} \cdots a_{n-12} \cdot a_{n1}. \qquad (2.5)$$

Пример 2.9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Выделяя элементы побочной диагонали 5, 2, 4, 1 и используя формулу (2.5), получим $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4 \cdot 3/2} 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 40.$

Ответ: $\Delta = 40$.

Пример 2.10. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Переставим местами строки (1) и (3). После этого элементы первой строки умножаем сначала на (–4), а затем на (–2) и прибавляем к соответствующим элементам второй и третьей строки. Тогда определитель матрицы A примет следующий вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Далее элементы второй строки умножаем на (–9) и прибавляем к соответствующим элементам третьей строки. В результате находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -28 \end{vmatrix} = 1(-1)(-28) = 28.$$

Ответ: $\det A = 28$.

Пример 2.11. Используя свойства определителей и формулу (2.4), вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавляя к первой и к четвертой строкам вторую строку, а к третьей строке – вторую строку, умноженную на два, получим определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Далее, используя формулу (2.4), разлагаем полученный определитель Δ' по третьему столбцу. В результате получаем определитель третьего порядка, в котором выносим за знак определителя общий множитель 3 третьего столбца:

$$\Delta' = (-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя в полученном определителе 3-го порядка третью строку к первой и второй строкам и разлагая полученный определитель по первому столбцу с помощью формулы (2.4), вычисляем значение исходного определителя

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (21 - 24) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Пример 2.12. Вычислить определитель квадратной матрицы четвертого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. При вычислении определителя четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

умножим первый столбец на 2, –1, 1 и складываем соответственно со вторым, третьим и четвертым столбцами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 10 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам второй строки

$$\Delta = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ 6 & -1 & 4 \\ 10 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ 6 & -1 & 4 \\ 10 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

сведем к вычислению определителя второго порядка:

$$\Delta = -1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-4+4) = 0.$$

Ответ: $\Delta = 0$.

2.3. Обратная матрица

Квадратная матрица A, у которой $\det A \neq 0$, называется *невырожденной* (неособенной), а при $\det A = 0$ – *вырожденной* (особенной).

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема о существовании обратной матрицы. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A'^T,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, а матрица A'^T называется *присоединенной*.

Нахождение обратной матрицы выполняется по следующему алгоритму.

1. Вычислить $\det A$ исходной квадратной матрицы A. Если $\det A = 0$, то исходная матрица обратной не имеет; если $\det A \neq 0$, то переходим ко второму шагу.

2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов A.

3. Составить присоединенную матрицу A'^T, записав алгебраические дополнения элементов строк в столбцы.

4. Умножить элементы присоединенной матрицы на величину, обратную определителю исходной матрицы. Полученная в результате матрица будет обратной.

5. Выполнить проверку, т. е. вычислить AA^{-1} или $A^{-1}A$. Каждое из этих произведений должно быть равно единичной матрице E.

Пример 2.13. Найти обратную матрицу для матрицы второго порядка вида $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8.$$

Матрица A невырожденная. Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A'^T = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} к элементам

$$A_{11} = (-1)^2 M_{11} = 1(-2) = -2;\ A_{12} = (-1)^3 M_{12} = (-1)3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = (-1)(-4) = 4;\ A_{22} = (-1)^4 M_{22} = 1 \cdot 2 = 2.$$

Присоединенная матрица $A'^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\left(-\frac{3}{8}\right) & 2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) \\ 3\left(-\frac{1}{4}\right) - 2\left(-\frac{3}{8}\right) & 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Для нахождения обратной матрицы можно использовать метод, основанный на элементарных преобразованиях матриц (основной метод для матриц большой размерности).

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк. Пусть A – невырожденная матрица. Элементарными преобразованиями строк матрицы являются:

1) перемена двух строк местами;

2) умножение всех элементов строки на число, не равное нулю;

3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, предварительно умноженных на некоторое число;

4) удаление нулевых строк (столбцов).

Применяя указанные элементарные преобразования строк к матрице

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right),$$

приведем ее к виду

$$(E\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Поскольку $A^{-1}(A\,|\,E)=(A^{-1}A\,|\,A^{-1}E)=(E\,|\,A^{-1})$, то $B=A^{-1}$. Отсюда получаем следующий способ нахождения обратной матрицы (при условии, что $\det A\neq 0$):

1) записываем матрицы A и E рядом через черту $(A\,|\,E)$;

2) с помощью элементарных преобразований над строками полученной матрицы приводим ее к виду $(E\,|\,B)$;

3) выписываем обратную матрицу $A^{-1}=B$.

Две матрицы A и B равных размерностей, которые получаются одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются *эквивалентными*. Для обозначения эквивалентных матриц используется запись $A\sim B$.

Пример 2.14. С помощью элементарных преобразований строк найти матрицу A^{-1}, обратную матрице $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выпишем матрицу $(A\,|\,E)$. Умножая вторую строку на –1 и прибавляя к первой строке, а затем умножая первую строку на –4 и прибавляя ко второй строке, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot(-1)+\mathrm{I}\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot(-4)+\mathrm{II}\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right).$$

Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ выполняются, следовательно, вычисленная матрица является обратной к матрице A.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 2.15. С помощью элементарных преобразований строк найти матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выписав матрицу $(A \mid E)$ и поменяв местами первые две строки, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее, умножая третью строку на –2 и –3 и прибавляя последовательно ко второй и третьей строке, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Разделив в ней элементы первой строки на 2, получим в левой части от разделительной черты единичную матрицу. Следовательно, правая часть определяет обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности полученного результата вычисляем:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ выполняются, следовательно, вычисленная матрица является обратной к матрице A.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.4. Ранг матрицы

Ранг матрицы – одна из основных числовых характеристик матриц. С его помощью решается вопрос о совместности систем линейных уравнений, определяется размерность пространства решений однородных систем, выявляется линейная зависимость или независимость систем векторов и вычисляется ее ранг.

Для введения понятия ранга матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $m\times n$ понадобится определение ее *базисного минора*. Выберем любое натуральное число k, $1\le k\le \min\{m, n\}$, выделим любые k строк и столбцов матрицы A и назовем *минором k-го порядка* определитель, элементы которого расположены на пересечении выделенных строк и столбцов. Минор k-го порядка в дальнейшем будем обозначать M_k.

Определение. *Рангом* матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $m\times n$ называется наибольший порядок ее отличного от нуля минора.

Для обозначения ранга матрицы A используется запись $\operatorname{rang} A$ или $r(A)$. Любой минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется ее *базисным минором*.

Ранг матрицы можно вычислять с помощью *элементарных преобразований* вида 1) – 4) (см. с. 50).

Вычисление ранга с помощью элементарных преобразований базируется на следующем утверждении: *ранги исходной матрицы и матрицы, полученной из нее с помощью элементарных преобразований, равны.*

Используя введенное определение эквивалентности, приведенное выше утверждение можно переформулировать: *ранги эквивалентных матриц равны.*

Рассматриваемый метод состоит в построении для данной матрицы с помощью элементарных преобразований эквивалентной матрицы, имеющей базисный минор. Примерами матриц, которые обладают указанным свойством, являются:

• прямоугольные ступенчатые матрицы, базисный минор которых образуют строки и столбцы с расположенными в них ступенчатыми элементами; ранг таких матриц равен числу ступенчатых элементов;

• трапециевидные матрицы с ненулевыми элементами, стоящими на пересечении первых r строк и столбцов, порождающих базисный минор; ранг таких матриц равен r, а их строки, начиная с $(r+1)$-й, являются нулевыми;

• матрицы диагонального вида с единственными ненулевыми элементами, равными единице, которые расположены на пересечении r первых строк и столбцов; ранг таких матриц равен r;

• матрицы диагонального вида с единственными ненулевыми элементами, стоящими на пересечении первых r строк и столбцов; ранг которых равен r;

• матрицы с единственными ненулевыми элементами, расположенными в разных строках и столбцах; ранг таких матриц равен числу ненулевых элементов.

Построение для заданной матрицы с помощью элементарных преобразований одной из указанных матриц позволяет на основании вышеприведенных утверждений вычислить ее ранг.

Следует отметить, что наиболее рациональным способом вычисления ранга матрицы рассматриваемым методом является нахождение для заданной матрицы эквивалентной ступенчатой матрицы, так как при этом используются только элементарные преобразования строк. В преобразуемой матрице перерасчет элементов строки, в которой лежит обнуляемый элемент, расположенный ниже соответствующего ступенчатого элемента, можно проводить с использованием *метода прямоугольников*.

Правило прямоугольника. Предположим, что элемент матрицы $a_{11} \neq 0$ (в противном случае переставим местами строки). Назовем данный элемент *разрешающим*, а строку и столбец, где он находится, – *разрешающими*.

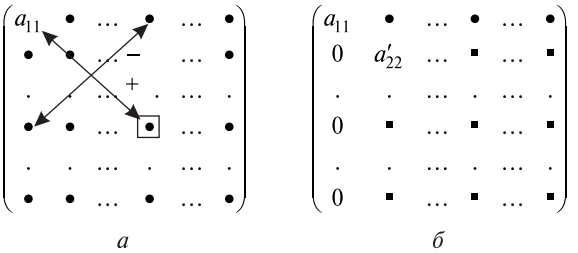
Приведем алгоритм метода.

1. Элементы разрешающей строки оставляем неизменными.

2. Элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, записываем нулевыми (рис. 2.1).

3. Все остальные элементы получаются после вычисления определителей второго порядка (их элементы составляют прямоугольник), у которых пересчитываемый элемент вместе с разрешающим образуют главную диагональ.

4. Вновь полученная матрица преобразуется аналогичным образом с учетом разрешающего элемента a'_{22}.



а *б*

Рис. 2.1

5. Таким образом, с каждым шагом становятся равными 0 элементы столбцов ниже главной диагонали главного минора матрицы (минора наивысшего порядка, расположенного в левом верхнем углу), и матрица приводится либо к диагональной, либо к трапециевидной форме.

6. Ранг полученной матрицы будет равен числу ненулевых строк матрицы, т. е. порядку базисного минора матрицы, и рангу исходной матрицы.

Пример 2.16. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

используя метод прямоугольников.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -72 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной трапециевидной матрицы равен 3, следовательно, $\operatorname{rang} A = 3$.

Ответ: $\operatorname{rang} A = 3$.

Пример 2.17. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & -1 \end{pmatrix},$$

вычислив эквивалентные ей ступенчатую матрицу и матрицу диагонального вида с ненулевыми элементами, равными единице.

Решение. Первый элемент первой строки матрицы A не равен нулю, следовательно, его можно считать разрешающим элементом. Обнулив первый

элемент третьей строки и произведя перерасчет ее остальных элементов по правилу прямоугольника, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim A.$$

Первый элемент второй строки равен 0. Следовательно, для получения ступенчатой матрицы осталось обнулить второй элемент третьей строки и пересчитать остальные ее элементы по правилу прямоугольника.

Сделав это, получим трапециевидную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim A,$$

которая является ступенчатой матрицей специального вида. Ранг полученной трапециевидной матрицы равен 2, следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Для получения диагональной матрицы необходимо обнулить элементы второй строки полученной трапециевидной матрицы, расположенные правее ее второго элемента.

С этой целью умножим элементы второго столбца на –2 и прибавим к соответствующим элементам третьего столбца, а затем сложим второй столбец с четвертым. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim A,$$

ранг которой равен 2.

Ответ: $\operatorname{rang} A = 2$.

2.5. Системы линейных уравнений

Линейным уравнением относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ называется алгебраическое выражение вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i. \qquad (2.6)$$

Числа a_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$ называются *коэффициентами уравнения* (2.6), первый индекс i которых определяет номер уравнения, если их несколь-

ко, а второй j – номер переменной, которой соответствует коэффициент. Числа b_i называются *свободными членами*.

Системой линейных уравнений называется совокупность m линейных уравнений вида (2.6), которая записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Таким образом, система линейных уравнений включает в себя m уравнений, зависящих от n неизвестных. Решением системы (2.7) называется упорядоченный набор действительных чисел (α_1, α_2, ..., α_j, ..., α_n), при подстановке которых вместо соответствующих переменных (с теми же номерами) каждое из уравнений системы превращается в верное равенство (тождество). Система называется *совместной*, если имеет хотя бы одно решение, в противном случае – *несовместной*. Процесс решения системы состоит в нахождении всех ее решений или в установлении ее несовместности. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной* в противном случае.

Матрица $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$, элементами которой являются коэффициенты при переменных, называется основной *матрицей системы*. Матрица вида

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* системы и получается добавлением к A столбца свободных членов.

Если расширенная матрица имеет ступенчатый вид, то (2.7) называется *ступенчатой* системой линейных уравнений. Частными видами ступенчатых систем являются *трапециевидная* и *треугольная* системы, расширенными матрицами которых являются соответственно трапециевидная и верхнетреугольная матрицы.

Вводя в рассмотрение матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ свободных членов, систему линейных уравнений (2.7) можно записать в *матричной форме*:

$$AX = B. \tag{2.8}$$

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений вида (2.7) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы равен рангу ее расширенной матрицы $(A|B)$, т. е. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$.

Следствие 1. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r$, то при $r = n$ (ранг равен числу переменных) (2.7) – определенная система, а при $r < n$ – неопределенная.

Следствие 2. Если $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A|B)$, то система (2.7) несовместна.

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются *матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса*.

Матричный метод применяется для решения системы (2.7) с числом переменных, равным числу уравнений, т. е. при $n = m$, при условии неравенства нулю определителя матрицы системы A. При указанных условиях решением является матрица-столбец, определяемая формулой $X = A^{-1}B$.

Метод Крамера используется для решения системы указанного выше вида в случае неравенства нулю определителя матрицы A, который называется определителем системы и обозначается Δ. Если $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет единственное решение, которое вычисляется по *формулам Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.9}$$

Здесь $\Delta = \det A$, а каждое число Δ_i, i = 1, 2, ..., n, равно значению определителя матрицы, полученной из A заменой i-го столбца на столбец B.

Из равенства $\Delta = 0$ не следует несовместность системы с числом переменных, равным числу уравнений, так как такие системы могут иметь бесконечное множество решений, что устанавливается с помощью теоремы Кронекера – Капелли.

Метод Гаусса (метод исключения переменных) применяется для нахождения всех решений или выявления несовместности системы линей-

ных уравнений (2.7) с произвольным числом переменных n и любым числом уравнений m.

Две системы вида (2.7) называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если их множества решений совпадают или обе они несовместны.

Элементарными преобразованиями системы (2.7) называются следующие преобразования ее уравнений:

1) перемена местами любых двух уравнений системы;

2) умножение коэффициентов и свободного члена любого уравнения на произвольное число, не равное нулю;

3) прибавление ко всем коэффициентам и свободному члену любого уравнения соответствующих коэффициентов и свободного члена любого другого уравнения, умноженных на произвольное число, не равное нулю.

4) удаление уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Теоретической основой, гарантирующей корректность метода Гаусса, является следующее утверждение: элементарные преобразования любой системы (2.7) приводят ее к эквивалентной системе.

Метод Гаусса состоит из двух основных этапов, первый из которых называется его *прямым ходом*, а второй – *обратным*. В результате *прямого хода* с помощью элементарных преобразований система приводится к эквивалентной ступенчатой системе, если в процессе его выполнения не будет установлена несовместность преобразуемой системы и, следовательно, исходной системы (2.7). В результате выполнения обратного хода находится решение ступенчатой системы, которое одновременно является решением исходной системы.

Первый шаг прямого хода состоит в исключении переменной x_1 из уравнений системы (2.7), кроме первого.

В процессе выполнения прямого хода метода Гаусса из подсистем удаляются уравнения, коэффициенты и свободный член которых равны нулю, так как такие уравнения выполняются при любых значениях переменных.

Если на некотором шаге метода Гаусса получается уравнение, коэффициенты которого равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то выполнение метода Гаусса прекращается, так как такое уравнение не имеет решения, что означает несовместность соответствующей подсистемы и, следовательно, несовместность исходной системы (2.7).

Обратный ход метода Гаусса состоит в нахождении решения ступенчатой системы, полученной в результате выполнения прямого хода. Вначале в ней выделяются *базисные переменные*, номера которых совпадают со вторыми индексами j_1, j_2, ..., j_{r-1}, j_r первых ненулевых элементов строк расширенной матрицы преобразованной системы. После выделения базисных переменных остальные переменные объявляются *свободными*. Далее

базисные переменные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{r-1}}, x_{j_r}$ выражаются через свободные переменные, начиная с последнего уравнения.

Обратный ход метода Гаусса выполняется до тех пор, пока не будет выражена первая базисная переменная x_{j_1} через свободные переменные.

Формулы, выражающие базисные переменные через свободные, определяют общее решение системы (2.7). Любое частное числовое решение получается при выборе произвольных числовых значений свободных переменных и последующем вычислении значений базисных переменных.

Замечание. Из описания прямого хода метода Гаусса следует, что при реализации элементарных преобразований системы все вычисления проводятся с коэффициентами и свободными членами ее уравнений, т. е. с элементами ее расширенной матрицы. Поэтому более удобно преобразовывать не уравнения системы (2.7), а с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы приводить ее к ступенчатому виду. Такие преобразования строк использовались ранее при вычислении обратной матрицы.

После приведения расширенной матрицы к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса) выписывается соответствующая ей ступенчатая система линейных уравнений и выполняется обратный ход метода Гаусса.

Замечание. Если в процессе выполнения прямого хода метода Гаусса получена расширенная матрица, являющаяся верхнетреугольной, то при выполнении обратного хода находятся числовые значения всех переменных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, которые являются единственным решением системы (2.7).

Замечание. Одной из модификаций метода Гаусса является *метод Жордана – Гаусса* (*метод полного исключения переменных*). При выполнении этого метода исходная система с помощью элементарных преобразований приводится к эквивалентной системе, в которой каждая из базисных переменных входит только в одно уравнение. Расширенная матрица такой эквивалентной системы может быть получена посредством обнуления с помощью элементарных преобразований всех ненулевых элементов столбцов ступенчатой матрицы, в которых расположены первые ненулевые элементы ее строк. Напомним, ступенчатая матрица вычисляется при выполнении прямого хода метода Гаусса.

Алгоритмически указанное преобразование расширенной матрицы осуществляется по следующему правилу: *после вычисления ступенчатой матрицы в каждом ее столбце, в котором расположен первый ненулевой элемент некоторой строки, обнуляются все его ненулевые элементы и затем по правилу прямоугольника пересчитываются элементы строк, в которых расположены обнуляемые элементы данного столбца.*

При реализации приведенного правила не обязательно полностью выполнять прямой ход метода Гаусса. При определении очередного первого ненулевого элемента некоторой строки можно обнулять все остальные ненулевые элементы соответствующего столбца с последующим пересчетом по правилу прямоугольника элементов строк матрицы, в которых расположены обнуляемые элементы.

После получения результирующей ступенчатой матрицы специального вида выписывается соответствующая ей система линейных уравнений, базисные переменные которой непосредственно выражаются через свободные переменные без использования обратного хода метода Гаусса.

Пример 2.18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

методом обратной матрицы.

Решение. Выписываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

и вычисляем по правилу треугольника

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 2 - 1 - 6 = -16.$$

Так как матрица A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Для ее определения находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

Используя формулу (1.16) для вычисления обратной матрицы, записываем

$$A^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -1 & 7 & -4\\ 3 & -5 & -4\end{pmatrix}.$$

Вводя матрицы-столбцы $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ – переменных, $B=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$ – свободных членов и записывая данную систему в матричной форме, получим матричное уравнение $AX=B$, решением которого является матрица-столбец

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -1 & 7 & -4\\ 3 & -5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}(-4)\cdot 2+(-4)\cdot 2+0\cdot 7\\ (-1)\cdot 2+7\cdot 2+(-4)\cdot 7\\ 3\cdot 2+(-5)\cdot 2+(-4)\cdot 7\end{pmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}-16\\ -16\\ -32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=2$ – решение системы линейных уравнений.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=2.$

Пример 2.19. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3+x_4=0,\\ x_2-2x_4=2,\\ x_1-x_2-2x_3+x_4=-1,\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=1\end{cases}$$

методом Гаусса, используя элементарные преобразования ее уравнений.

Решение. Для удобства пересчета коэффициентов и свободных членов уравнений системы поменяем местами первое и третье уравнения. В результате получаем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \end{cases}$$

в которой коэффициент $a_{11} = 1$. Далее, умножая последовательно первое уравнение на $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -2$, а затем на $-\frac{a_{41}}{a_{11}} = -1$ и прибавляя его соответственно к третьей и четвертой строкам системы, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \underline{x_1 - x_2 - 2x_3 + \quad x_4 = -1,} \\ \quad x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 2, \\ \quad 3x_2 + \quad x_3 - \quad x_4 = 2, \\ \quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Оставляя без изменений первое уравнение (для наглядности оно отделено чертой), преобразуем подсистему, образованную вторым, третьим и четвертым уравнениями. Прибавляем ко второму и третьему уравнениям выделенной подсистемы первое, умноженное на –3, получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + \quad x_4 = -1, \\ \quad \underline{x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 2,} \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = -4, \\ \qquad\quad 3x_3 + 8x_4 = -4. \end{cases}$$

Не изменяя первое и второе уравнения полученной системы, преобразуем ее подсистему, отделенную чертой. Для этого умножаем ее первое уравнение на –3 и прибавляем к ее второму. В результате получаем треугольную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + \ x_4 = -1, \\ \quad x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = -4, \\ \qquad\qquad\quad - 7x_4 = 8. \end{cases}$$

На этом шаге прямой ход метода Гаусса закончен.

Далее выполняем обратный ход метода Гаусса. Из последнего уравнения находим значение переменной $x_4 = -\frac{8}{7}$ и, подставляя его в третье уравне-

ние, вычисляем значение переменной $x_3 = -4 - 5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{12}{7}$. После этого, подставляя числовое значение четвертой переменной во второе уравнение, находим $x_2 = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = -\frac{2}{7}$. На последнем шаге обратного хода подставляем найденные числовые значения второй, третьей и четвертой переменных в первое уравнение и вычисляем $x_1 = -1 + \left(-\frac{2}{7}\right) + 2 \cdot \left(\frac{12}{7}\right) - \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{23}{7}$. Таким образом, получено решение исходной системы:

$$x_1 = \frac{23}{7},\ x_2 = -\frac{2}{7},\ x_3 = \frac{12}{7},\ x_4 = -\frac{8}{7}.$$

Подставив найденные числовые значения переменных в каждое уравнение исходной системы и вычислив значения их правых частей, убеждаемся в справедливости числовых равенств

$$2 \cdot \left(\frac{23}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) - 3 \cdot \left(\frac{12}{7}\right) + \left(-\frac{8}{7}\right) = 0,\ -\frac{2}{7} - 2 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = 2,$$

$$\frac{23}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right) - 2 \cdot \left(\frac{12}{7}\right) + \left(-\frac{8}{7}\right) = -1,\ \frac{23}{7} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{12}{7} + 3 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = 1,$$

которые свидетельствуют о правильности проведенных вычислений.

Ответ: $x_1 = \frac{23}{7},\ x_2 = -\frac{2}{7},\ x_3 = \frac{12}{7},\ x_4 = -\frac{8}{7}$.

Пример 2.20. Решить систему линейных уравнений из примера 2.19, используя элементарные преобразования строк ее расширенной матрицы.

Решение. Выписав расширенную матрицу системы

$$(A|B) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

выбрав в первой строке в качестве ненулевого элемента $a_{11} = 2$, обнулив третий и четвертый элементы первого столбца и пересчитав элементы третьей и четвертой строк по правилу прямоугольника (см. рис. 2.1), получим преобразованную матрицу

$$A' = (a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim (A|B).$$

Выбрав в ней в качестве первого ненулевого элемента второй строки $a'_{22}=1$, обнулив ненулевые элементы второго столбца, лежащие ниже a'_{22}, и пересчитав элементы третьей и четвертой строк по правилу прямоугольника, приходим к матрице следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -4 \end{pmatrix} \sim (A|B).$$

На последнем шаге прямого хода метода Гаусса выбираем в третьей строке полученной матрицы в качестве первого ненулевого ее третий элемент, обнуляем четвертый ненулевой элемент третьего столбца и пересчитываем по правилу прямоугольника элементы четвертой строки, начиная с ее четвертого элемента. В результате получаем трапециевидную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -16 \end{pmatrix} \sim (A|B).$$

Разделив на 2 элементы четвертой строки, выписываем для полученной матрицы ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + 5x_4 = -4, \\ -7x_4 = 8, \end{cases}$$

решение которой приводится в предыдущем примере.

Ответ: $x_1 = \frac{23}{7},\ x_2 = -\frac{2}{7},\ x_3 = \frac{12}{7},\ x_4 = -\frac{8}{7}.$

Пример 2.21. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

методом Жордана – Гаусса.

Решение. Расширенная матрица данной системы имеет следующий вид:

$$(A|B) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве первого ненулевого элемента первой строки выбираем $a_{11} = 2 \neq 0$. Используя правило преобразования расширенной матрицы, приведенное в описании метода Жордана – Гаусса, обнуляем все ненулевые элементы первого столбца, исключая a_{11}, и пересчитываем, используя правило прямоугольника, элементы строк, в которых они располагались. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim (A|B).$$

Сократив элементы второй и третьей строки на 2, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве первого ненулевого элемента второй строки выбираем ее второй элемент. Обнулив все ненулевые элементы второго столбца, пересчитав по правилу прямоугольника элементы строк матриц, в которых расположены обнуляемые элементы, получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На очередном шаге метода Жордана – Гаусса выбираем в третьей строке в качестве ненулевого ее третий элемент и обнуляем все остальные ненулевые элементы третьего столбца. Затем пересчитываем по правилу прямоугольника элементы строк, в которых расположены обнуляемые элементы. Выполнив указанные действия, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвертый элемент последней строки является ее первым ненулевым элементом. Обнуляя первый элемент четвертого столбца и пересчитывая по правилу прямоугольника элементы первой строки, получим эквивалентную диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножив ее первую строку на $1/2$, а вторую и четвертую на -1, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

диагональная часть которой определяет коэффициенты системы эквивалентной исходной системе уравнений. Запись эквивалентной системы позволяет сразу (без выполнения обратного хода) определить решение исходной системы: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$.

Пример 2.22. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3, \end{cases}$$

выбрав для этого подходящий метод.

Решение. Так как число уравнений данной системы равно числу переменных, то попытаемся решить ее, используя формулы Крамера (2.9). Вначале вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{vmatrix}.$$

Для этого вынесем за его знак 2 и 3 – общие множители соответственно элементов первого и второго столбцов. В силу третьего и четвертого свойства определителей должны выполняться равенства

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -9 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

так как второй определитель имеет два равных столбца. Следовательно, формулы Крамера не применимы для нахождения решений данного уравнения.

Применим метод Жордана – Гаусса. Выписываем расширенную матрицу

$$(A|B) = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

и выполняем преобразования, аналогичные приведенным в предыдущем примере. Выбирая a_{11} в качестве ненулевого элемента первой строки, обнуляя элементы первого столбца и пересчитывая элементы второй, третьей и четвертой строк по правилу прямоугольника, получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & -16 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim (A|B).$$

Выбирая первым ненулевым элементом второй строки 5, обнуляя остальные элементы третьего столбца и пересчитывая элементы всех строк, исключая вторую, получаем результирующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ступенчатые элементы которой 10 и 5 расположены соответственно в первом и третьем столбцах. Следовательно, базисными объявляются переменные x_1 и x_3, а свободными – x_2 и x_4.

Записав для полученной матрицы ступенчатую систему

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \quad + \quad x_4 = 6, \\ \qquad\qquad 5x_3 - 4x_4 = 1, \end{cases}$$

сразу выражаем базисные переменные через свободные:

$$x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x_4,\ x_1 = \frac{6}{10} - \frac{15}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_4.$$

Полученные выражения базисных переменных определяют все множество решений заданной системы, так как значениями свободных переменных могут быть любые действительные числа. Придавая конкретные числовые значения свободным переменным и вычисляя соответствующие им значения базисных переменных, получим частное решение. Например, полагая $x_2 = 0$ и $x_4 = 0$, получим $x_1 = \frac{6}{10}$ и $x_3 = \frac{1}{5}$. Таким образом, $x_1 = \frac{6}{10}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = 0$ – частное решение системы.

Ответ: $x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x_4,\ x_1 = \frac{6}{10} - \frac{15}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_4.$

2.6. Системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю. Таким образом, указанная система полностью определяется своей матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ и записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_j = 0, \ldots, x_n = 0$$

является ее решением, которое называется *нулевым* или *тривиальным*. Ответ на вопрос о наличии нетривиальных решений системы (2.10) дает следующее утверждение: *система однородных линейных уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $A = (a_{jj})$ *этой системы меньше числа ее переменных, т. е. при выполнении неравенства* $\operatorname{rang} A < n$.

Каждой неоднородной системе линейных неравенств (2.7) соответствует однородная система (2.10). Множества решений этих систем находятся в тесной связи. Особенности и свойства этой связи удобно излагать в терминах n-мерных векторов и векторных пространств (см. гл. 3).

Как и решения систем (2.7), (2.10) n-мерные векторы определяются упорядоченными наборами n действительных чисел. Для обозначения вектора, определяемого набором чисел a_1, a_2, ..., a_n, используется запись $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а сами числа называются компонентами вектора. Множество всех n-мерных векторов образует векторное пространство размерности n, равной наибольшему числу линейно независимых векторов. Будем говорить, что вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является решением одной из систем (2.7) или (2.10), если его компоненты при подстановке в каждое уравнение системы вместо соответствующей переменной обращают его в числовое равенство.

Структуру множества решений системы (2.10) при отождествлении их с векторами описывает следующее утверждение: *все решения однородной системы линейных уравнений образуют подпространство размерности* $n - r$ *в векторном пространстве* n*-мерных векторов, где* r *— ранг матрицы системы* A.

В подпространстве решений системы (2.10), если оно не тривиально (не совпадает с нулевым вектором), существует $n - r$ *базисных* ветров $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-r}$ таких, что любой вектор $\vec{x}$ этого подпространства представим в виде их линейной комбинации вида

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\vec{a}_{n-r}, \tag{2.11}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ – любые действительные числа.

Формула (2.11) определяет *общее решение* однородной системы (2.10). Набор базисных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-r}$ пространства решений системы (2.10) называется ее *фундаментальной системой решений.*

Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы уравнений (2.10) можно реализовать следующим образом:

1) одним из методов исключения переменных найти линейные выражения r базисных переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ через $n - r$ свободных переменных;

2) придавая поочередно каждой свободной переменной $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r-1}}, x_{j_{n-r}}$ значение, равное единице, а остальным переменным – ноль, т. е. полагая

$$x_{j_1} = 1, x_{j_2} = 0, \ldots, x_{j_{n-r-1}} = 0, x_{j_{n-r}} = 0;$$

$$x_{j_1} = 0, x_{j_2} = 1, \ldots, x_{j_{n-r-1}} = 0, x_{j_{n-r}} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{j_1} = 0, x_{j_2} = 0, \ldots, x_{j_{n-r-1}} = 1, x_{j_{n-r}} = 0;$$

$$x_{j_1} = 0, x_{j_2} = 0, \ldots, x_{j_{n-r-1}} = 0, x_{j_{n-r}} = 1$$

и вычисляя для каждого указанного числового набора значения базисных переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, получим $n - r$ решений системы (2.10), которые образуют ее фундаментальную систему решений.

Связь между общим решением неоднородной системы линейных уравнений и общим решением ее однородного аналога (2.10) определяет следующая формула:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\vec{a}_{n-r},$$

где $\vec{x}$ – любое решение неоднородной системы (2.7), $\vec{x}_0$ – некоторое ее частное решение, $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\vec{a}_{n-r}$ – общее решение однородной системы (2.10), определяемое ее фундаментальной системой решений $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-r}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-r}$ – произвольный набор действительных чисел.

Пример 2.23. Найти решения однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot(-2)+\mathrm{II}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -8\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot(-1)+\mathrm{III}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -8\\ 1 & 5 & -8\end{pmatrix}\cdot(-1)+\mathrm{III}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Итак, $\operatorname{rang} A=2$, а $n=3$. Следовательно, система имеет бесконечное множество нетривиальных решений, которые находят методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=0,\\ 5x_2-8x_3=0;\end{cases}$$

$$x_2=\frac{8x_3}{5},\ x_1=\frac{x_3}{5}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}\dfrac{x_3}{5}\\ \dfrac{8x_3}{5}\\ x_3\end{pmatrix}$, $x_3\in R$.

Пример 2.24. Найти фундаментальную систему решения однородной системы линейных уравнений вида

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+3x_3-x_4+2x_5=0.\end{cases}$$

Решение. Для определения формул, связывающих базисные и свободные переменные данной системы, применим метод Жордана – Гаусса. Записав матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix}\underline{1} & 1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

и сделав первый шаг этого метода (умножение первой строки на –3 и прибавление ее ко второй), получим матрицу

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -6 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Далее обнуляем элементы второго столбца, содержащего ступенчатый элемент –1, складывая для этого вторую строку с первой. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выписываем соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad -3x_3 + 3x_4 \qquad = 0, \\ \quad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

и, выражая базисные переменные x_1 и x_2 через свободные x_3, x_4, x_5, получаем формулы, связывающие базисные и свободные переменные следующего вида:

$$x_1 = 3x_3 - 3x_4;\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 - x_5.$$

Вводя в рассмотрение три числовых набора: 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 и придавая поочередно свободным переменным x_3, x_4, x_5 числовые значения, определяемые этими наборами, по вышеуказанным формулам вычислим значения базисных переменных. В результате получим значения базисных переменных:

$$x_1 = 3,\ x_2 = -6 \text{ при } x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0;$$
$$x_1 = -3,\ x_2 = 5 \text{ при } x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0;$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = -1 \text{ при } x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.$$

Вычисленные значения базисных переменных и выбранные значения свободных переменных определяют в пространстве решений три базисных вектора

$$\vec{a}_1 = (3, -6, 1, 0, 0);\ \vec{a}_2 = (-3, 5, 0, 1, 0);\ \vec{a}_3 = (0, -1, 0, 0, 1),$$

которые являются фундаментальной системой решений данной системы.

Ответ: $x_1 = 3x_3 - 3x_4;\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 - x_5.$

2.7. Линейные операторы. Матрица линейного оператора

Пусть V, W – два линейных пространства.

Определение. *Оператором f, действующим из V в W*, называется отображение вида f: $V \to W$, ставящее в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ пространства V некоторый вектор $\vec{y}$ пространства W: $\vec{y} = f(\vec{x})$. При этом вектор $\vec{y}$ называют *образом вектора* $\vec{x}$.

Оператор f называется линейным, если выполняются следующие два условия:

1) $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$ для любых $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$;

2) $f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in V$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$.

Если $V=W=L$, то линейный оператор, действующий в этом случае из L в L, называется *линейным преобразованием пространства* L. В дальнейшем будем рассматривать только случай $V=W=L$.

Пусть f – линейный оператор в конечномерном пространстве L_n, а $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$, – некоторый базис пространства L_n. Разложим векторы $f(\vec{e}_k)$ по этому базису. Получим

$$f(\vec{e}_k)=\vec{a}_{1k}\vec{e}_1+\vec{a}_{2k}\vec{e}_2+\ldots+\vec{a}_{nk}\vec{e}_n,\ k=\overline{1,n}.$$

Тогда матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора f в базисе* $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$.

Если задана матрица оператора f, то он определяется однозначно, а именно: если $\vec{y}=f(\vec{x})$, то $Y=AX$, где X и Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно; A – матрица оператора f в базисе $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$.

Если A и A' – матрицы оператора f в базисах $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$, и $\vec{e}_i'$, $i=\overline{1,n}$, соответственно, а T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$, к базису $\vec{e}_i'$, $i=\overline{1,n}$, то *формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса* имеет вид

$$A'=T^{-1}AT.$$

Суммой f_1+f_2, произведением f_1f_2 двух линейных преобразований f_1 и f_2 и произведением λf числа λ и линейного преобразования f пространства L называются преобразования, определяемые соответственно равенствами

$$(f_1+f_2)(\vec{x})=f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x}),\ (f_1f_2)(\vec{x})=f_1(f_2(\vec{x})),\ \lambda f(\vec{x})=f(\lambda\vec{x})$$

для любого вектора $\vec{x}$ пространства L_n. Преобразования $f_1+f_2, f_1f_2, \lambda f$ являются линейными. Если A_1, A_2, A – матрицы преобразований f_1, f_2, f пространства L_n в некотором базисе, то матрицами преобразований $f_1+f_2, f_1f_2, \lambda f$ пространства L_n в том же базисе будут соответственно матрицы A_1+A_2, A_1A_2, λA.

Пример 2.24. Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в любом ортонормированном базисе, если положительное направление отсчета угла совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный вектор во второй (рис. 2.2).

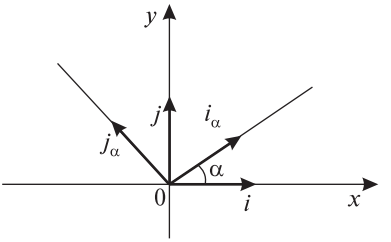


Рис. 2.2

Решение. Поворот плоскости на угол α переводит всякий вектор плоскости в вектор этой же плоскости, сумму векторов – в сумму векторов, сохраняя линейные отношения между векторами. Следовательно, это – линейное преобразование. Найдем его матрицу в базисе $\vec{i}, \vec{j}$. При повороте на угол α векторы $\vec{i}, \vec{j}$ перейдут в векторы

$$\vec{i}_\alpha = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j},\ \vec{j}_\alpha = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}.$$

Матрица данного преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Пример 2.25. Преобразование f переводит вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(\vec{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Доказать, что это преобразование линейное, и найти его матрицу.

Решение. Покажем, что $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$, $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$. Имеем:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3, 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3, 3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3),$$

$$f(\vec{x}) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3),$$

$$f(\vec{y}) = (y_2 + y_3,\ 2y_1 + y_3,\ 3y_1 - y_2 + y_3),$$

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3,$$
$$3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3).$$

Отсюда $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Кроме того,

$$f(\lambda\vec{x}) = \big(\lambda(x_2 + x_3),\ \lambda(2x_1 + x_3),\ \lambda(3x_1 - x_2 + x_3)\big),$$

$$\lambda f(\vec{x}) = \lambda(x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3) =$$
$$= \big(\lambda(x_2 + x_3),\ \lambda(2x_1 + x_3),\ \lambda(3x_1 - x_2 + x_3)\big).$$

Следовательно, преобразование f является линейным. Найдем его матрицу. Для этого запишем векторы $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$ в том же базисе:

$$f(\vec{e}_1) = 0 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3,\ f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2.26. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \vec{a}_2 = (0, 1, 2), \vec{a}_3 = (1, 0, 0)$ в векторы $\vec{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -1), \vec{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Решение. Пусть A – искомая матрица,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решаем матричное уравнение

$$AB = C,\ ABB^{-1} = CB^{-1},\ A = CB^{-1}.$$

Определитель матрицы B $\Delta = 6 - 5 = 1$,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 2.27. Даны два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ линейного пространства и матрица A линейного преобразования f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Найти ма-

трицу этого преобразования в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$, если $\vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица T перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель T $\Delta = 15 + 8 - 2 + 2 - 10 - 12 = 1$.

Находим обратную матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования f в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26 & -19 & 6 \\ 37 & 26 & -8 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

2.8. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Определение. Пусть число λ и вектор $\vec{x} \in L$, $\vec{x} \neq 0$, таковы, что $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Тогда число λ называется *собственным числом линейного оператора f*, а вектор $\vec{x}$ – *собственным вектором* этого *оператора*, *соответствующим собственному числу* λ.

В конечномерном пространстве векторное равенство $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E)X = 0, \tag{2.12}$$

A – матрица оператора f; $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $X \neq 0$. Отсюда следует, что λ является собственным числом оператора f в том и только в том случае, когда система (2.12) имеет ненулевые решения, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$. Тогда λ – корень многочлена

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

Многочлен $P(\lambda)$ называют *характеристическим многочленом оператора f*, а уравнение $P(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением*.

Собственными числами оператора могут быть только корни его характеристического уравнения, но не всякий корень характеристического уравнения является собственным числом линейного преобразования действительного линейного пространства. Например, комплексное характеристическое число не может быть собственным числом линейного преобразования действительного линейного пространства.

Собственное число называется *m-кратным*, если оно является m-кратным корнем характеристического уравнения, и *простым*, если оно является простым корнем характеристического уравнения.

Собственные векторы линейного преобразования действительного линейного пространства можно найти следующим образом.

1. Выбирают в данном пространстве некоторый базис.

2. Находят матрицу A данного преобразования в выбранном базисе.

3. Определяют характеристические числа линейного преобразования f, т. е. корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Выделяют из них только те $\lambda = \lambda_i$, которые являются собственными числами данного линейного преобразования, т. е. для действительного линейного пространства – только действительные корни характеристического уравнения. Если характеристических чисел нет, то не существует и собственных векторов.

4. Записывают систему (2.12) в координатной форме:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Затем полагают λ равным одному из собственных чисел λ_i данного преобразования и находят ненулевое решение $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_n^{(i)}$ этой си-

стемы. Таким образом, вектор $X^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_n^{(i)})$ является собственным вектором данного оператора f с собственным числом λ_i. Так как при $\lambda = \lambda_i$ система (2.13) имеет бесконечное множество решений, то для указанного оператора существует бесконечное множество собственных векторов с данным собственным числом.

Пример 2.28. Найти собственные векторы линейного оператора действительного линейного пространства, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0,\ \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

отсюда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (2-\lambda_1)x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 + (-3-\lambda_1)x_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\lambda_2)x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 + (-3-\lambda_2)x_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\lambda_1 = 1$, то первая из систем имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значения x_1 и x_2 должны удовлетворять уравнению $x_1 = -4x_2$. Следовательно, решение этой системы имеет вид $x_2 = t,\ x_1 = -4t,$ $t \in \mathbf{R}$. Итак, собственному числу $\lambda = 1$ соответствуют собственные векторы $\mathbf{X}^{(1)} = (-4t, t),\ t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}$.

Значение $\lambda_2 = -2$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

решая которую имеем $x_2 = t,\ x_1 = -t,\ t \in \mathbf{R}$. Следовательно, собственными векторами данного оператора, соответствующими собственному числу $\lambda = -2$, являются $\mathbf{X}^{(2)} = (t, -t),\ t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}$.

Ответ: $\lambda = 1$, $\lambda = -2$; $\mathbf{X}^{(1)} = (-4t, t)$, $\mathbf{X}^{(2)} = (t, -t)$, $t \neq 0$.

Пример 2.29. Найти собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0, \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(12 - 7\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(5-\lambda) = 0,$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0.$$

Так как целые корни многочлена с целыми коэффициентами – делители свободного члена, то, подставляя всевозможные делители в последнее уравнение, убеждаемся, что корнями уравнения являются числа 1, 4, 7. Следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ – собственные числа.

Для определения собственных векторов записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Подставляя в систему (2.14) $\lambda_1 = 1$, получаем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_3, \\ x_1 = -2x_3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим: $x_1 = -2t$, $x_2 = 2t$, $t \in \mathbf{R}$. Таким образом, собственными векторами, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$, являются $\mathbf{X}^{(1)} = (-2t, 2t, t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Подставив в систему (2.14) $\lambda_2 = 4$, имеем систему

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_3 = 2x_2, \\ x_1 = 2x_2. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = t$, получаем, что $x_1 = 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 2t,\ t \in \mathbf{R}$, – решение последней системы. Следовательно, $\mathbf{X}^{(2)} = (2t, t, 2t),\ t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}$, – собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_2 = 4$.

Подставив в (2.14) $\lambda_3 = 7$, получим систему

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

эквивалентную системе

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $x_1 = \frac{1}{2}t,\ x_2 = -t,\ x_3 = t,\ t \in \mathbf{R}$. Таким образом, собственными векторами данного оператора, соответствующими собственному числу $\lambda_3 = 7$, являются $\mathbf{X}^{(3)} = \left(\frac{t}{2}, -t, t\right),\ t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}$.

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7;\ \mathbf{X}^{(1)} = (-2t, 2t, t),\ \mathbf{X}^{(2)} = (2t, t, 2t),\ \mathbf{X}^{(3)} = \left(\frac{t}{2}, -t, t\right),\ t \neq 0$.

Пример 2.30. Найти собственные векторы линейного оператора *f*, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0, \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-4 + \lambda^2)(-3 - \lambda) + 3 + 2(-3 - \lambda) + 5(-2 - \lambda) = 0,$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,\ (\lambda + 1)^3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Таким образом, оператор f имеет одно собственное число $\lambda = -1$ кратности 3.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$.

Подставив $\lambda = -1$ в систему

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-3-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + (-2-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Из последнего уравнения имеем $x_1 = -x_3$. Тогда

$$x_2 = 3x_1 + 2x_3 = -3x_3 + 2x_3 = -x_3.$$

Полагая $x_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$, находим, что $x_1 = -t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$, – решение системы (2.15). Тогда $\mathbf{X} = (-t, -t, t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, – собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $\mathbf{X} = (-t, -t, t)$, $t \neq 0$.

2.9. Применение методов линейной алгебры в химии

2.9.1. Элементы теории графов в химии

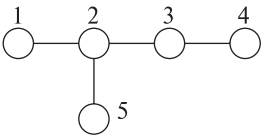
В химии описание структур молекул и соединений, путей сложных реакций, правил фаз можно моделировать с помощью графов. Компьютерная химия во многом основана на применении теории графов. Теория графов представляет собой математическую основу хемоинформатики, которая позволяет точно определить число теоретически возможных изомеров углеводородов и других органических соединений. Основным математическим аппаратом для этих областей является матричная алгебра.

Графом $G(V, E)$ называется совокупность множества вершин V и множества пар вершин E. Неупорядоченная пара вершин называется ребром, упорядоченная пара – дугой. Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным; граф, содержащий только дуги, называется ориентированным или орграфом.

Одна из важных проблем в химии касается кодировки структуры химических соединений некоторым числом или набором чисел. Требуется закодировать химическую структуру соединения некоторым числом или набором чисел. Причем сделать это надо так, чтобы этот набор чисел имел химический смысл, т. е. каждому набору чисел взаимно однозначно соответствовала бы определенная молекулярная структура. Числа, которыми кодируется структура молекулы, получили название топологических индексов. Окончательно эта проблема до настоящего времени пока не решена в целом.

Рассмотрим в качестве примера некоторые из способов построения топологических индексов. Широкое применение для кодирования топологической структуры молекул получила теория графов – раздел математики, посвященный описанию топологических свойств объектов, которые могут быть представлены в виде совокупности вершин и соединяющих их линий (ребер, дуг). Углеводородная цепь со стертыми атомами водорода может рассматриваться как химический граф. Особенность такого представления состоит в том, что при этом отбрасываются все метрические свойства молекулы – расстояния между атомами и валентные углы, а отражается лишь связность атомов, т. е. рассматриваются исключительно топологические свойства молекулы. Поскольку в классическом варианте теории не делается различий между типами атомов и типами связей, то такое представление применимо к классу насыщенных углеводородов. В современных вариантах теорий топологических индексов учитываются различия между типами атомов и связей путем присваивания различных численных весов вершинам и ребрам, отвечающим разным типам атомов и связей. Топологические индексы строятся путем преобразования химического графа в число. Способ, которым это осуществляется, изменяется от индекса к индексу.

Рассмотрим расчет топологических индексов на примере молекулы изопентана $(CH_3)_2CHCH_2CH_3$. Химический граф изопентана выглядит следующим образом:



Для того чтобы количественно характеризовать граф, его представляют в виде топологических матриц. Это можно сделать различными способами. В практике построения топологических индексов получили распространение два типа матриц: матрица расстояний и матрица смежности. Они представляют собой квадратные матрицы с числом строк и столбцов, равным числу вершин соответствующего химического графа. Номер строки и столбца ма-

трицы равен номеру соответствующей ему вершины. Каждый элемент в матрице расстояний **D** представляет собой число ребер, соединяющих вершину i с вершиной j наикратчайшим путем, и обозначается как d_{ij}. Элементы матрицы смежности **A**, обозначаемые a_{ij}, равны либо единице, либо нулю в зависимости от того, связана ли ребром вершина i графа с вершиной j или нет. На рис. 2.3 показаны соответствующие матрицы для изопентана.

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 2.3

Один из первых топологических индексов был предложен Винером. Он вычисляется как полусумма элементов матрицы расстояний:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}. \tag{2.16}$$

Подставляя значения элементов матрицы **D** для изопентана, получаем $W = 18$.

Индекс Винера обладает не самой высокой дискриминирующей способностью. Разные индексы представляют собой те или иные варианты матриц **D** и **A**. Например, несложно определить индекс среднеквадратических расстояний матрицы **D**:

$$S = \left[\frac{\sum\limits_{d_i=1}^{d_i(\max)} g_i d_i^2}{\sum\limits_{d_i=1}^{d_i(\max)} g_i} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Здесь g_i соответствует числу пар вершин в матрице **D**, расстояние между которыми равно d_i. Для изопентана соответственно получим:

$$S = \left[\frac{4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2}{10} \right]^{\frac{1}{2}} = 1{,}949.$$

Аналогичные индексы можно получить и для матрицы смежности. Например, индекс, введенный Бартоном, представляет собой сумму всех элементов матрицы смежности:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \qquad (2.18)$$

Для изопентана его значение равно 8.

Поскольку матрица смежности и матрица расстояний в приведенной формулировке применимы для описания только насыщенных углеводородов, то используются также подходы, позволяющие вычислять топологические индексы соединений с гетероатомами и кратными связями. Это достигается путем введения весов соответствующим элементам матриц. Вес диагональных компонентов матриц вычисляется исходя из какой-либо индивидуальной характеристики соответствующего атома, образующего данную вершину химического графа, например заряда ядра атома этого элемента, а вес недиагональных элементов матрицы расстояний устанавливается в зависимости от типа соединяемых атомов и типа связи (одинарная, двойная, тройная). После такой модификации матриц собственно вычисление индексов может осуществляться по тем же формулам, что и для классических матриц.

Кроме топологических индексов, основанных на матрицах расстояния и смежности, существует целый ряд других структурных дескрипторов: центрические топологические индексы, теоретико-информационные индексы, составные индексы и др.

Пример 2.31. Построить матрицы смежностей и расстояний для молекулы изобутана. Вычислить их топологические характеристики (индексы), используя формулы (2.16)–(2.18).

Решение. Рассмотрим расчет топологических индексов на примере молекулы изобутана. Химический граф изобутана выглядит следующим образом:

$$\overset{1}{CH_3}-\overset{2}{CH}-\overset{3}{CH_3}$$
$$\quad\;\; |$$
$$\quad\;\; \overset{4}{CH_3}$$

На рис. 2.4 показаны соответствующие матрицы для изобутана.

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 2.4

Используя формулу (2.16) и подставляя значения элементов матрицы **D** для изобутана, получаем $W = 9$.

Используя формулу (2.17), вычислим индекс среднеквадратических расстояний матрицы **D**: $S = 1{,}58$.

Индекс Бартона представляет собой сумму всех элементов матрицы смежности (см. формулу (2.18)). Тогда и для изобутана $A = 6$.

2.9.2. Модель планирования эксперимента

Для проведения некоторого эксперимента требуется приготовить из n компонентов смесь, которая содержала бы m веществ в количествах b_i ($i = 1, 2, ..., m$). Сколько необходимо взять каждого компонента, если известно, что в j-м компоненте содержится a_{ij} единиц i-го вещества?

Пусть x_j ($j = 1, 2, ..., n$) – количество j-го компонента, необходимого для приготовления смеси. Тогда $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$ – количество в смеси первого вещества, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1.$$

Аналогично, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$ – количество в смеси второго вещества, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2$$

и т. д.

В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m),$$

которая является математической моделью данной задачи.

2.9.3. Анализ размерностей

Некоторые изучаемые процессы бывают настолько сложными, что построить какую-либо подходящую математическую модель для них не всегда удается. В таких случаях для выявления соотношений между переменными величинами иногда уместно применить анализ их размерностей. Этот математический метод особенно эффективен в сочетании с данными экспериментов.

В основу анализа размерностей положена так называемая π-*теорема*, согласно которой *общую функциональную зависимость*, *связывающую между собой n переменных величин при m основных единицах измерения*, *можно представить в виде зависимости между n – m безразмерными комплексами этих величин*. Эта теорема дает возможность представить соотношение между некоторым числом р а з м е р н ы х величин, характеризующих данный процесс, в виде соотношения между меньшим числом б е з р а з м е р н ы х величин.

Построение математической модели. Пусть установлено, что изучаемый процесс зависит от параметров N, n_1, n_2, n_3 и n_4, физический смысл которых известен. Например, N – сопротивление, n_1 – скорость, n_2 – площадь и т. п. В общем виде связь между этими параметрами запишем так:

$$N = f(n_1, n_2, n_3, n_4).$$

Часто оказывается возможным при описании процесса последнюю функцию представить в некотором приближении в виде степенной зависимости между параметрами N и n_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$N = \alpha n_1^x n_2^y n_3^z n_4^u, \tag{2.19}$$

где x, y, z и u – неизвестные величины; α – безразмерный коэффициент.

Требуется получить математическую зависимость между x, y, z и u, применяя анализ размерностей этих величин.

Предположим, что размерности всех параметров, характеризующих процесс, выражаются через основные единицы измерения системы СИ, т. е. массу M (кг), длину L (м) и время T (с).

Так как смысл параметров, входящих в уравнение (2.19), известен, то их размерности можно выразить через M, L и T:

$$[N] = [M^{b_1} L^{b_2} T^{b_3}];$$

$$[n_1] = [M^{a_{11}} L^{a_{21}} T^{a_{31}}];$$

$$[n_2] = [M^{a_{12}} L^{a_{22}} T^{a_{32}}];$$

$$[n_3] = [M^{a_{13}} L^{a_{23}} T^{a_{33}}];$$

$$[n_4] = [M^{a_{14}} L^{a_{24}} T^{a_{34}}].$$

Подставив эти значения в уравнение (2.19), получаем:

$$[M^{b_1} L^{b_2} T^{b_3}] =$$

$$= \alpha [M^{a_{11}} L^{a_{21}} T^{a_{31}}]^x [M^{a_{12}} L^{a_{22}} T^{a_{32}}]^y [M^{a_{13}} L^{a_{23}} T^{a_{33}}]^z \times [M^{a_{14}} L^{a_{24}} T^{a_{34}}]^u,$$

или

$$[M^{b_1} L^{b_2} T^{b_3}] = \alpha M^{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u} L^{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u} T^{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u}.$$

Учитывая, что размерности обеих частей последнего уравнения одинаковы, а коэффициент α – безразмерный, можно приравнять показатели при одинаковых степенях M, L и T правой и левой частей уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = b_3. \end{cases} \tag{2.20}$$

Итак, математической моделью для нахождения неизвестных величин x, y, z и u в уравнении (2.19) является линейная алгебраическая система.

Пример 2.32. Пусть система (2.20) известна и такова, что ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен 3. Используя π-теорему, установить связь между безразмерными комплексами величин n_1, n_2, n_3 и n_4.

Решение. Система (2.20) такова, что ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы [15, гл. 1] и равен 3, поэтому любые три переменные этой системы выражаются через четвертую. Выразим, например, x, y и z через u:

$$x = au + b;$$

$$y = cu + d;$$

$$z = eu + k,$$

где a, b, c, d, e и k – числа, выражающиеся через коэффициенты системы уравнений (2.20).

Подставим найденные величины x, y и z в (2.19):

$$N = \alpha n_1^{au+b} n_2^{cu+d} n_3^{eu+k} n_4^u,$$

или

$$N = \alpha (n_1^a n_2^c n_3^e n_4)^u n_1^b n_2^d n_3^k.$$

Последнее выражение можно записать в безразмерной форме:

$$\frac{N}{n_1^b n_2^d n_3^k} = \alpha (n_1^a n_2^c n_3^e n_4)^u. \tag{2.21}$$

Таким образом, связь между пятью параметрами, входящими в формулу (2.19), представлена в виде зависимости между двумя безразмерными комплексами:

$$\pi_1 = \frac{N}{n_1^b n_2^d n_3^k} \text{ и } \pi_2 = n_1^a n_2^c n_3^e n_4.$$

В уравнение (2.21) входят два неизвестных параметра α и u, которые чаще всего определяются путем экспериментального исследования процес-

са. Но так как изучение этого вопроса требует значительного углубления в специальную теорию, то останавливаться на нем здесь не будем.

Замечание. Метод анализа размерностей не является универсальным. Однако его сочетание с известной *теорией подобия*, которая используется в курсе химической технологии, позволяет сводить задачи с достаточно большим числом *размерных* величин к задачам с меньшим числом *безразмерных* комбинаций, составленных из этих величин. С этой теорией можно ознакомиться, например, в книге [16, гл. I, с. 25–27].

2.9.4. Расчет смесей сложного состава

Пусть для проведения эксперимента требуется приготовить смесь, содержащую m каких-то веществ. Причем в смесь должно входить b_i единиц (массовых, объемных) i-го вещества ($i = 1, 2, ..., m$).

Известно при этом, что для приготовления смеси имеется n компонентов, каждый j-й из которых содержит a_{ij} единиц i-го вещества ($j = 1, 2, ..., n$).

Если обозначить через x_j количество j-го компонента, которое необходимо взять для приготовления нужной смеси, то сумма

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

даст требуемое в смеси количество b_i вещества, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \tag{2.22}$$

где $i = 1, 2, ..., m$.

Таким образом, процедура приготовления смеси, содержащей необходимое количество некоторого вещества, описывается системой линейных алгебраических уравнений вида (2.22).

Пример 2.33 [16, с. 19–21]. Приготавливается нитрующая смесь из трех компонентов, содержащих воду, азотную и серную кислоты. Требуется установить, какое количество каждого компонента необходимо взять, чтобы получить M кг смеси, содержащей b_1, b_2 и b_3 % соответственно H_2O, HNO_3 и H_2SO_4, если содержание воды, азотной и серной кислоты в каждом компоненте известно и представлено в виде матрицы третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как смесь должна быть приготовлена из трех компонентов, каждый из которых состоит из трех веществ, то система (2.22) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = Mb_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = Mb_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = Mb_3. \end{cases}$$

Для нахождения величин x_i можно воспользоваться правилом Крамера. Для этого найдем det$A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $\det A \neq 0$, то можно найти все x_i, вычислив $\det A_i$. Например:

$$x_2 = \frac{M}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 2.34. Пусть требуется приготовить 6250 кг нитрующей смеси следующего состава: воды (b_1) – 22 %, азотной кислоты (b_2) – 16 %, серной кислоты (b_3) – 62 % из меланжа: $H_2O(a_{11})$ – 5 %, $HNO_3(a_{21})$ – 85 % и $H_2SO_4(a_{31})$ – 10 %; из олеума: $H_2O(a_{12})$ – 0 %, $HNO_3(a_{22})$ – 0 % и $H_2SO_4(a_{32})$ – 104 %; из отработанной кислоты: $H_2O(a_{13})$ – 30 %, $HNO_3(a_{23})$ – 0 % и $H_2SO_4(a_{33})$ – 70 %.

Найти расход кислот, идущих на приготовление этой смеси.

Решение. Составим определитель системы и вычислим его:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 30 \\ 85 & 0 & 0 \\ 10 & 104 & 70 \end{vmatrix} = 85 \cdot 30 \cdot 104,$$

затем найдем

$$\det A_1 = 4250 \begin{vmatrix} 22 & 0 & 30 \\ 16 & 0 & 0 \\ 62 & 104 & 70 \end{vmatrix} = 4250 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 104.$$

Отсюда расход меланжа

$$x_1 = \frac{4250 \cdot 16 \cdot 104 \cdot 30}{85 \cdot 104 \cdot 30} = 800{,}0 \ \text{(кг)}.$$

Вычислив

$$\det A_2 = 4250\begin{vmatrix} 5 & 22 & 30 \\ 85 & 16 & 0 \\ 10 & 62 & 70 \end{vmatrix} = 4250\cdot 10\cdot 5\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 17 & 8 & 0 \\ 2 & 31 & 7 \end{vmatrix} = 4250\cdot 100\cdot 280,$$

получим расход олеума:

$$x_2 = 4250\frac{100\cdot 280}{85\cdot 104\cdot 30} = 4250\cdot 0{,}1098 = 467 \text{ (кг)}.$$

Найдем теперь

$$\det A_3 = 4250\begin{vmatrix} 5 & 0 & 22 \\ 85 & 0 & 16 \\ 10 & 104 & 62 \end{vmatrix} = 4250\cdot 104\cdot(85\cdot 22 - 16\cdot 5) = 4250\cdot 104\cdot 5\cdot 2\cdot 179$$

и вычислим расход отработанной кислоты:

$$x_3 = 4250\frac{104\cdot 5\cdot 2\cdot 179}{85\cdot 104\cdot 30} = 4250\cdot 0{,}7019 = 2983 \text{ (кг)}.$$

Чтобы проверить правильность полученных результатов, найдем сумму

$$x_1 + x_2 + x_3 = 800 + 467 + 2983 = 4250 \text{ (кг)},$$

соответствующую общему количеству смеси, которое требуется приготовить.

Ответ: 800 кг, 467 кг, 2983 кг.

Подобные задачи рассматриваются при оптимизации расхода компонентов в химических технологиях.

2.9.5. Определение состава смеси по данным спектрофотометрических измерений

Оптическое поглощение растворов химических веществ характеризуют величиной оптической плотности

$$D = \lg\left(\frac{I_0}{I}\right),$$

где I_0, I – интенсивности светового потока соответственно до и после прохождения через исследуемый раствор.

Известно, что оптическая плотность связана с концентрацией c поглощающего вещества и толщиной слоя l, в котором происходит поглощение, следующим образом:

$$D = \varepsilon c l,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ – молекулярный коэффициент поглощения, являющийся индивидуальной характеристикой поглощающего вещества и зависящий от

длины волны λ. Данное соотношение является следствием закона Бугера – Ламберта – Бера, описывающего оптическое поглощение в растворе.

Для смеси из n невзаимодействующих (и, следовательно, поглощающих независимо друг от друга) веществ оптическая плотность $D = D(\lambda)$ раствора равна сумме оптических плотностей веществ, входящих в данную смесь, т. е.

$$D(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)c_1 l + \ldots + \varepsilon_n(\lambda)c_n l.$$

Так как оптическая плотность $D(\lambda)$ зависит от выбора длины волны λ, то последнее равенство можно записать в виде

$$D(\lambda_i) = l\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\lambda_j)c_j,$$

где λ_i – фиксированное i-е значение длины волны, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, для определения концентрации n компонентов необходимо построить систему минимум из n уравнений, т. е. выполнить n измерений оптической плотности на разных длинах волн.

Пример 2.35. Пусть имеется смесь n-ксилола, m-ксилола, o-ксилола и этилбензола, для которых известны значения молярных коэффициентов поглощения на соответствующих длинах волн λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 (табл. 2.1). Толщина спектрофотометрической кюветы 1 см.

Таблица 2.1

λ	Молярный коэффициент поглощения на длине волны λ, л/(моль · см)				Оптическая плотность
	n-ксилол	m-ксилол	o-ксилол	этилбензол	
λ_1	1,5020	0,0514	0	0,0408	0,10130
λ_2	0,0261	1,1516	0	0,0820	0,09943
λ_3	0,0340	0,0355	2,5320	0,2933	0,21940
λ_4	0,0340	0,0684	0	0,3470	0,03396

Исходя из данных об оптической плотности для смеси на указанных длинах волн (см. последнюю колонку табл. 2.1), найти концентрации компонентов смеси (соответственно c_1, c_2, c_3 и c_4).

Решение. Составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}5020c_1 + 0{,}0514c_2 + 0{,}0408c_4 = 0{,}10130; \\ 0{,}0261c_1 + 1{,}1516c_2 + 0{,}0820c_4 = 0{,}09943; \\ 0{,}0340c_1 + 0{,}0355c_2 + 2{,}5320c_3 + 0{,}2933c_4 = 0{,}21940; \\ 0{,}0340c_1 + 0{,}0684c_2 + 0{,}3470c_4 = 0{,}03396. \end{cases}$$

Численное решение этой системы осуществлено по методу Гаусса с использованием программы, приведенной в прил. 1:

$$c_1 = 6{,}266 \cdot 10^{-2},\ c_2 = 7{,}951 \cdot 10^{-2},\ c_3 = 7{,}588 \cdot 10^{-2},\ c_4 = 7{,}606 \cdot 10^{-2}.$$

Замечание. Рассмотренный выше подход к определению состава смеси накладывает определенные требования на выбор длин волн, при которых проводятся измерения оптической плотности. Действительно, для смеси аддитивно поглощающих веществ *A* и *B*, характеризующихся мольными коэффициентами поглощения $\varepsilon_A(\lambda)$ и $\varepsilon_B(\lambda)$, концентрация каждого из компонентов может быть найдена из данных о величине оптической плотности смеси на длинах волн λ_1 и λ_2 путем совместного решения следующих двух уравнений:

$$D(\lambda_1) = \varepsilon_A(\lambda_1)c_A l + \varepsilon_B(\lambda_1)c_B l;$$
$$D(\lambda_2) = \varepsilon_A(\lambda_2)c_A l + \varepsilon_B(\lambda_2)c_B l$$

только в том случае, если определитель этой системы не равен нулю, т. е.

$$l\left(\varepsilon_A(\lambda_1)\varepsilon_B(\lambda_2) - \varepsilon_A(\lambda_2)\varepsilon_B(\lambda_1)\right) = l\varepsilon_B(\lambda_1)\varepsilon_B(\lambda_2)\left(\frac{\varepsilon_A(\lambda_1)}{\varepsilon_B(\lambda_1)} - \frac{\varepsilon_A(\lambda_2)}{\varepsilon_B(\lambda_2)}\right) \neq 0.$$

Для этого необходимо выполнение условия

$$\frac{\varepsilon_A(\lambda_1)}{\varepsilon_B(\lambda_1)} \neq \frac{\varepsilon_A(\lambda_2)}{\varepsilon_B(\lambda_2)}.$$

Следовательно, для определения концентраций c_A и c_B не годятся участки спектров, на которых ход спектров поглощения компонентов *A* и *B* одинаков.

2.9.6. Исследование состава смеси при помощи системы химических сенсоров

Сенсорами называют химически чувствительные приборы, выходной сигнал которых (например, ток или напряжение) зависит от концентрации определенного вещества в газовой среде или в растворе.

Пусть имеется смесь из трех веществ *A*, *B* и *C* и три сенсора, чувствительность которых к данным веществам известна (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Номер сенсора	Чувствительность сенсора к веществу			Регистрируемый сигнал, отн. ед.
	A	*B*	*C*	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

При этом для каждого сенсора выполняются следующие условия:

1) сигналы, обусловленные присутствием в смеси каждого из веществ, дают аддитивный вклад в общий отклик сенсора b_j;

2) величина сигнала от определенного вещества (компонента) прямо пропорциональна его концентрации, причем значение коэффициента пропорциональности (т. е. величина чувствительности a_{ij}) для каждого из веществ индивидуально.

Если теперь концентрации веществ *A*, *B* и *C* в смеси обозначить соответственно через x_1, x_2 и x_3, то для *i*-го сенсора сумма

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

будет означать общий отклик сенсора, т. е.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_{i4}. \qquad (2.23)$$

Таким образом, процедура расчета концентраций компонентов *A*, *B* и *C* сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 2.36. Составить систему алгебраических уравнений для определения концентраций компонентов *A*, *B* и *C* в смеси исходя из величины сигнала, регистрируемого каждым сенсором (крайняя справа колонка табл. 2.2).

Решение. Запишем уравнение (2.23) для каждого из сенсоров:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Для нахождения решения полученной системы линейных уравнений можно воспользоваться, например, методом Гаусса или правилом Крамера. Контроль качества определения концентраций компонентов в смеси можно выполнить путем подстановки найденных значений концентрации $x_1 - x_3$ в исходную систему и вычисления невязок r_i (i =1, 2, 3), т. е.

$$r_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j;$$

$$r_2 = b_2 - \sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j;$$

$$r_3 = b_3 - \sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j.$$

При малой погрешности решений величины r_i близки к нулю.

Замечание. Мерой чувствительности рассматриваемой системы из нескольких сенсоров является детерминант матрицы, составленной из коэффициентов a_{ij}, значение которого максимально в том случае, если все сенсоры строго селективны (а это значит, что все элементы матрицы, кроме диагональных, равны нулю).

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти AB и BA.

2.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверить, верны ли равенства

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2, \;\; A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

2.3. Вычислить A^3, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $AB - BA$.

2.5. Доказать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

является корнем многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

2.6. Вычислить определители матриц второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 2022 & 2019 \\ 2021 & 2020 \end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$;

2.7. Вычислить определители матриц третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

2.8. Вычислить определители матриц четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$;

2.9. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.10. Доказать, что для квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

порядок которой n, A^n – нулевая матрица.

2.11. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

2.12. Найти след ABC, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.13. Найти $\det AB$ и $\operatorname{tr} AB$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.14. При каком значении параметра α для матрицы A существует обратная A^{-1}?

а) $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. Доказать, что определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & k_3^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (k_i - k_j).$$

2.16. Доказать, что $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2.17. Доказать, что для квадратных матриц A и B:

а) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$; б) $(AB)^T = B^T A^T$; в) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

2.18. В каком случае ранг квадратной матрицы n-го порядка равен n?

2.19. Чему равен ранг матрицы A размерности 20×70, если в ней существует отличный от нуля минор порядка 10, а все миноры порядка не менее 11 равны нулю.

2.20. Вычислить ранг заданных матриц, указав один из базисных миноров:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 20 & 10 & -40 \\ 10 & -30 & 40 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

2.21. Найти ранг матриц с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 24 & 14 & 17 & 15 \\ 23 & 13 & 16 & 14 \\ 47 & 27 & 33 & 29 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2.22. Найти числовые значения параметра λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный единице.

2.23. Найти числовые значения параметра λ, при которых ранг нижеследующих матриц равен двум:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -\lambda \\ 8 & -4 & 8 & \lambda \\ 6 & -3 & 12 & \lambda \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.24. Найти значения λ, при которых ранг указанных матриц равен трем:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2.25. Найти значения параметра λ, при которых ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

равен:

а) 1; б) 2; в) 3.

2.26. Найти значения параметра λ, при которых ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

равен:

а) 1; б) 2; в) 3.

2.27. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

2.28. Найти значения параметра λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг, и указать его величину. Чему равен ранг при других значениях λ?

2.29. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях $\lambda \in \mathbf{R}$?

2.30. Вычислить ранг матриц с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

2.31. Методом Гаусса исследовать системы:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2.32. Исследовать зависимость решения системы от параметра α:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha; \\ &2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 3. \end{aligned}$$

2.33. Пусть x_j $(j = 1, \ldots, n)$ — общее количество продукта реакции, а b_j — конечное количество того же продукта в j-м эксперименте. Составить уравнения материального баланса, если известны нормы расхода a_{ij} $(i = 1, \ldots, n)$ на получение единицы i-го продукта в j-й реакции.

2.34. Методом обратной матрицы найти решения нижеследующих систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.35. Используя формулы Крамера, найти решения нижеследующих систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 7y = 2, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0, \\ x + 3y - 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16, \\ 17x_1 - x_2 = 17; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

м) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

н) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

2.36. Решить систему при всевозможных значениях параметра m:

а) $\begin{cases} (m+1)x - y = m, \\ (m-3)x + my = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - (m-1)y = 2, \\ (m+2)x + 2y = 4 - m^2. \end{cases}$

2.37. Выяснить, какие из приведенных ниже систем являются несовместными, совместными, определенными и неопределенными:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0x_1 - 0x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 = 4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

2.38. С помощью теоремы Кронекера – Капелли исследовать на совместность следующие системы и в случае их совместности найти решения:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ x_1-2x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+x_2+3x_3=7, \\ x_1-x_2+2x_3=2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-4x_2+x_3-x_4=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=3; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=1, \\ 3x_1+5x_3+x_4=10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=3, \\ 2x_1+x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-7x_3=0, \\ x_1-x_2+3x_3=3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-x_4=1, \\ 2x_1-10x_2+3x_4=0, \\ 4x_1-20x_2+6x_3+x_4=2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+5x_3=0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4+x_5=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4-x_5=3. \end{cases}$

2.39. Выяснить, при каком значении параметра λ следующие системы имеют единственное решение:

а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=5, \\ x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+x_3=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=\lambda, \\ 3x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+2x_2+3x_3=2. \end{cases}$

2.40. Выяснить, при каком значении параметра λ система несовместна:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=4, \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=1. \end{cases}$$

Исследовать на совместность следующие системы и в случае их совместности найти их решения методом Гаусса или методом Жордана – Гаусса.

2.41. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$

2.42. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ x_1-x_2+x_3=1. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2-x_3-2x_4=2. \end{cases}$

2.44. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-2x_4=4, \\ x_1-x_2+x_3=6. \end{cases}$

2.45. $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5, \\ x_1+x_2=1, \\ 4x_1+5x_2=7. \end{cases}$

2.46. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1. \end{cases}$

2.47. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$

2.48. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+5x_2+x_3=8, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 5x_1+2x_2-x_3=7. \end{cases}$

2.49. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1+3x_2+2x_3=5, \\ 5x_1+8x_2+10x_3=18, \\ x_1+x_2=1. \end{cases}$

2.50. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=7, \\ 3x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 5x_1-x_2-x_3=3. \end{cases}$

2.51. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1. \end{cases}$

2.52. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 4x_1+3x_2-5x_3+2x_4=4, \\ 7x_1+4x_2-7x_3+5x_4=7. \end{cases}$

2.53. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$

2.54. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

2.55. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7. \end{cases}$

2.56. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

2.57. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{cases}$

2.58. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7, \\ 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2. \end{cases}$

2.59. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$

2.60. $\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8, \\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18, \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=15. \end{cases}$

2.61. Исследовать следующие системы на совместность и найти решение в зависимости от значения параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7. \end{cases}$

Найти решения систем линейных однородных уравнений.

2.62. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=0. \end{cases}$

2.63. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$

2.64. $\begin{cases} 6x_1-8x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

2.65. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-5x_2+8x_3+x_4=0. \end{cases}$

2.66. $\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0. \end{cases}$

2.67. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ 5x_1-x_2-x_4=0. \end{cases}$

2.68. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

2.69. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 5x_1-x_2+5x_3+7x_4=0. \end{cases}$

Выяснить, существует ли фундаментальная система решений для указанных систем линейных однородных уравнений.

2.70. $\begin{cases} x_1-2x_2=0, \\ 3x_1+4x_2=0. \end{cases}$

2.71. $\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

2.72. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.73. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Найти фундаментальную систему решений для указанных систем линейных однородных уравнений.

2.74. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

2.76. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

2.75. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

2.77. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

В задачах **2.78**–**2.83** выяснить, является ли линейным преобразование f, переводящее любой вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\vec{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\vec{x}$.

2.78. $\vec{y} = (3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2)$.

2.79. $\vec{y} = (5\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2^3)$.

2.80. $\vec{y} = (\alpha_2 + 3\alpha_3, 5\alpha_1, 2\alpha_3 - 3\alpha_1)$.

2.81. $\vec{y} = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \alpha_3 + 2)$.

2.82. $\vec{y} = (\alpha_1\alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$.

2.83. $\vec{y} = (4\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2)$.

В задачах **2.84**–**2.87.** найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ в векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ соответственно.

2.84. $\vec{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 2)$, $\vec{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\vec{b}_3 = (1, -1, 1)$.

2.85. $\vec{a}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (-4, -2, -3)$, $\vec{b}_1 = (4, 5, 3)$, $\vec{b}_2 = (3, 3, 2)$, $\vec{b}_3 = (-1, -2, -1)$.

2.86. $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 3, 6)$, $\vec{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 0)$.

2.87. Матрица линейного преобразования f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу данного преобразования в базисе $(\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3)$, где

$$\vec{g}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

В задачах **2.88**–**2.93** найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

2.88. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.89. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

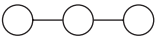
2.90. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

2.91. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

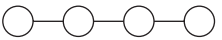
2.92. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

2.93. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

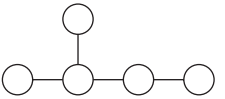
Построить матрицы смежностей и расстояний для молекул соединений, приведенных в задачах **2.94**–**2.103**. Вычислить их топологические характеристики (индексы), используя формулы (2.16)–(2.18).

2.94. 

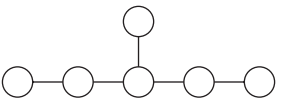
Пропан

2.95. 

Бутан

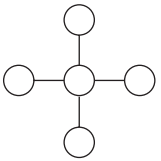
2.96. 

2-метилбутан

2.97. 

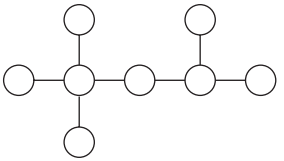
3-метилбутан

2.98.



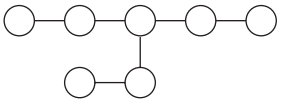
2,2-диметил-
пропан

2.99.



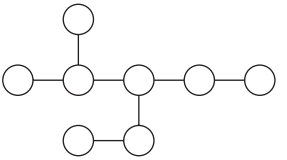
2,2,4-триметилпентан

2.100.



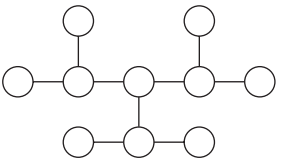
3-этиленпентан

2.101.



2-метил-3-этилпентан

2.102.



3-изопропил-
2,4-диметилпентан

Контрольные задания

Пакет вариантов контрольных заданий включает задачи по темам, изложенным в частях 2.1—2.6 второй главы. Вначале приводятся общие для всех вариантов контрольных работ формулировки задач, а затем в каждом отдельном варианте — числовые данные для каждой задачи. В вариантах числовые данные нумеруются двойным индексом, первый из которых указывает номер варианта, а второй — номер задачи.

Задача 1. Вычислить значение многочлена от заданной матрицы и выяснить, является ли она его корнем, или выполнить указанные операции.

Задача 2. Вычислить определитель, используя его свойства, с последующим разложением его по строке или столбцу или понижая его порядок.

Задача 3. Вычислить ранг матрицы в зависимости от значения параметра α.

Задача 4. Найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований или используя присоединенную матрицу. Сделать проверку.

Задача 5. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера.

Задача 6. Исследовать и решить систему линейных уравнений.

Задача 7. Найти решение матричного уравнения.

Задача 8. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

Вариант 1

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -8 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_1 - 10x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} -4 & 8 & 4 & 12 \\ -3 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & -8 & -4 & -6 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & -5 \\ 2 & -2 & \alpha & 10 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 2, \\ 5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант 3

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 15x_1 - 10x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

7. $X \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 4

1. $Y'B'BY,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ \alpha+1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 10x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант 5

1. $f(x) = x^2 - 4x - 9,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha & 4\alpha \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант 6

1. $AB - BA - C^2,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & \alpha \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

7. $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 7

1. $CD - DC - A^2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 & 2 \\ 2\alpha & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7. $X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 8

1. $ABC,\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 3\\ 4 & -2 & 3 & 1\end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & -1\\ 0 & \alpha & 10 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0,\\ x_1+x_2-2x_3=2,\\ x_1+x_2+4x_3=2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=1,\\ 2x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1+x_2+3x_3=7,\\ x_1-x_2+2x_3=2.\end{cases}$

7. $X\begin{pmatrix}-3 & -3 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0.\end{cases}$

Вариант 9

1. $f(x)=-3x^2+5x+3,\ A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 4 & -2\\ -1 & \alpha & -2 & 1\end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases}2x_1+x_3=18,\\ -x_1+2x_2+3x_3=9,\\ 3x_1-4x_2+x_3=-9.\end{cases}$

6. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 10

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 4,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 3 & -\alpha \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 20, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30, \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Глава 3

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

***Учебная задача*:** определение понятия вектора и векторного пространства, декартовой системы координат; векторные операции; разложение вектора по базису; изучение методов решения задач векторной алгебры.

***Литература*:** [1], [5–7], [10], [12], [15–16].

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Определение. *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и направление.

Векторы, начало и конец которых не указаны, принято обозначать строчными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …. Такие векторы можно прилагать к любой точке пространства. Приложив заданный вектор $\vec{a}$ к точке A, получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, представляющий этот вектор. В этом случае используется запись $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Длина отрезка AB называется *длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$, которая обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{o}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой или лежат на одной прямой.

Если при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными*. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны. Справедливо обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллине-

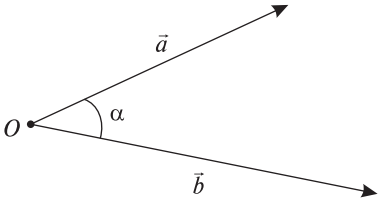


Рис. 3.1

арны, то они связаны равенством $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число. Следовательно, выполнение равенства

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad (3.1)$$

является необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. *Углом* $\alpha = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал в некоторой точке O (рис. 3.1).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, или $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 90°$.

3.1.1. Операции над векторами

Определение. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное ему, если $\lambda < 0$.

Пример 3.1. Дан вектор $\vec{a}$. Построить векторы: а) $2\vec{a}$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}$; в) $-3\vec{a}$; г) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Решение.

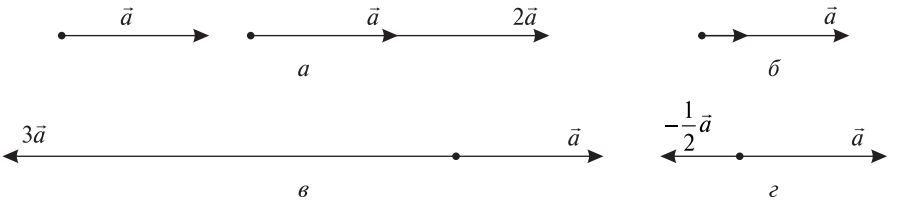


Рис. 3.2

Ответ: см. рис. 3.2.

Суммой векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 3.3) называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, который находится по правилу треугольника: *вектор* $\vec{a}$ *прилагается к точке* A, *затем вектор* $\vec{b}$ *прилагается к точке* B, *соединив точки* A, B *и* C, *получим вектор* $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$, и вычисляется по формуле

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}.$$

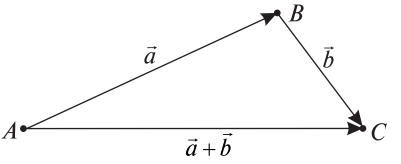


Рис. 3.3

Для нахождения суммы $\vec{a}+\vec{b}$ и разности $\vec{a}-\vec{b}$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется также правило параллелограмма: *сумма* $\vec{a}+\vec{b}$ *и разность* $\vec{a}-\vec{b}$ *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *равны соответственно* $\overrightarrow{AC}$ *и* $\overrightarrow{DB}$, *где* AC *и* DB *— диагонали параллелограмма* $ABCD$, *построенного на векторах* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *и* $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

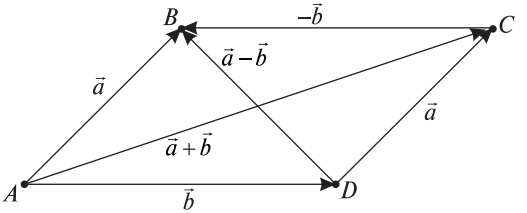


Рис. 3.4

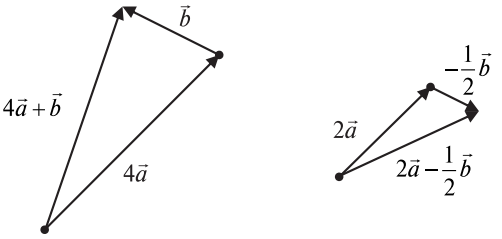
Применяя правило треугольника, получим (рис. 3.4):

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{DC}+(-1)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}.$$

Пример 3.2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.5). Построить векторы: а) $4\vec{a}+\vec{b}$; б) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Рис. 3.5

Решение.



а *б*

Рис. 3.6

Ответ: см. рис. 3.6.

Сложение векторов $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\vec{a}_{n-1} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ выполняется по *правилу многоугольника*:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_{n+1}}.$$

Пример 3.3. Даны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ (рис. 3.7). Построить вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$.

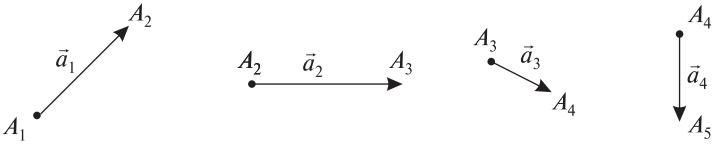


Рис. 3.7

Решение.

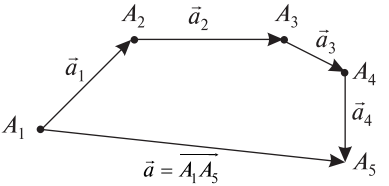


Рис. 3.8

Ответ: рис. 3.8.

3.1.2. Линейные комбинации и базисы множеств векторов

Определение. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Определение. *Базисом* в $\mathbf{R}^2$ называется любая упорядоченная пара $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Если $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базис, то любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, т. е.

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \tag{3.2}$$

Числа x и y в правой части равенства (3.2) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Определение. *Базисом* в $\mathbf{R}^3$ называется любая упорядоченная тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ некомпланарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Любой вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \tag{3.3}$$

Числа x, y, z называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Если в некотором базисе определены координаты x, y, z вектора $\vec{a}$, то для его обозначения используется запись $\vec{a} = (x; y; z)$. Равенства (3.2), (3.3) называются *разложением вектора* $\vec{a}$ по базису.

Два вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$$

Говорят, что вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, где коэффициенты λ_i – некоторые числа, $i = 1, \ldots, n$, если вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Связь между координатами линейной комбинации векторов и координатами векторов ее составляющих устанавливает

Теорема. Если вектор $\vec{a} = (x; y; z)$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_i = (x_i; y_i; z_i)$ с коэффициентами λ_i, $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_i\vec{a}_i + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n,$$

то

$$x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\ y = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,\ z = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i. \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.4) следует, что:

1) при умножении вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ на число λ все его координаты умножаются на это число, т. е. $\lambda\vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$;

2) при сложении (вычитании) двух векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ их соответствующие координаты суммируются, т. е.

$$\left(\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)\right)$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)\right).$$

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса принято обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Пример 3.4. Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_3, \vec{a}_2 \perp \vec{a}_3$. Построить ортонормированный базис.

Решение. Обозначим единичные векторы

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|},\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|},\ \vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|}.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортогональны и имеют длины, равные единице. Тогда они образуют ортонормированный базис, причем $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ (рис. 3.9).

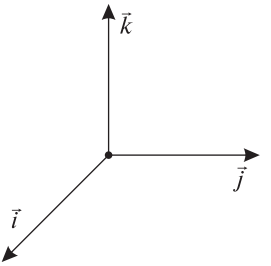


Рис. 3.9

Ответ: $\vec{i} = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|},\ \vec{j} = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|},\ \vec{k} = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|}.$

3.1.3. Системы координат

В трехмерном пространстве введена *декартова система координат*, если заданы:

1) точка O, называемая *началом координат*;

2) некоторый базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$;

3) три координатные оси Ox, Oy, Oz, проходящие через точку O, в направлении базисных векторов.

Определение. Если выбран ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то декартова система координат называется *прямоугольной* и обозначается $Oxyz$, при этом Ox называется *осью абсцисс*, Oy – *осью ординат*, Oz – *осью аппликат* (рис. 3.10).

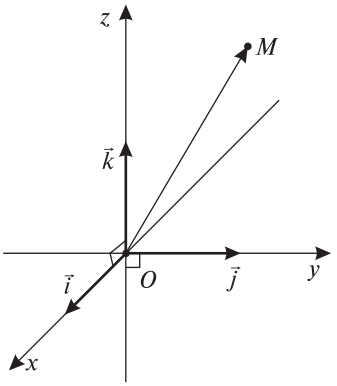


Рис. 3.10

Определение. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами* точки M в заданной системе координат называются координаты ее радиус-вектора, при этом первая ее координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3.5)$$

Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат и заданы две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ определяются равенствами

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1. \tag{3.6}$$

Расстояние между точками M_1 и M_2, равное длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, находится согласно (3.5), (3.6), по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{3.7}$$

Пусть задан отрезок, концами которого являются точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Точка $M(x; y; z)$ *делит отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ, если $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Координаты точки M вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) видно, что если $\lambda > 0$, то точка M принадлежит отрезку M_1M_2, а если $\lambda < 0$, то точка M расположена вне отрезка M_1M_2 и векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{MM_2}$ имеют противоположное направление.

Если точка $M(x; y; z)$ делит отрезок M_1M_2 на две равные части, то $\lambda = 1$ и, следовательно, координаты середины отрезка определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Замечание 3.1. Прямоугольную декартову систему координат на плоскости образуют: точка O – начало координат; ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j})$; две координатные оси Ox и Oy, проходящие через точку O в направлении векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$. Координаты векторов и точек на плоскости определяются упорядоченными парами чисел $(x; y)$. Поэтому при вычислениях используются формулы (3.4)–(3.8), в которых отсутствует аппликата.

Пример 3.5. В треугольнике ABC заданы длины сторон $AB = 2$, $AC = 3$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины сонаправлены соответственно с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Точка E – середина стороны BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}$ сонаправлены, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $AB = 2$, $AC = 3$, то $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = 3\vec{b}$. Достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 3.11), по правилу параллелограмма находим:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -2\vec{a} + 3\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

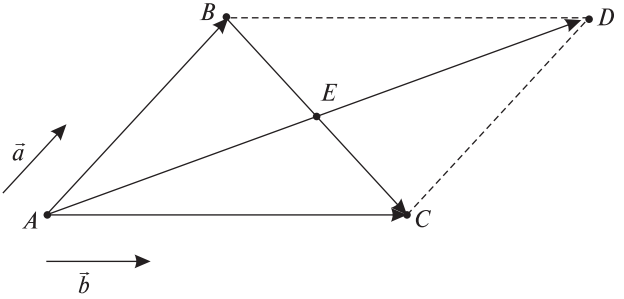


Рис. 3.11

Так как диагонали параллелограмма AD и BC в точке пересечения E делятся пополам, то $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

Пример 3.6. Найти значение y, при котором векторы $\vec{a} = (3; -2; 5)$ и $\vec{b} = (-6; y; -10)$ будут коллинеарны.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если выполняется равенство (3.1): $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ для некоторого значения λ. Записав приведенное векторное равенство в координатной форме $(3; -2; 5) = (-6\lambda; y\lambda; -10\lambda)$ и приравняв соответствующие координаты векторов, получим соотношения

$$3 = -6\lambda,\ -2 = \lambda y,\ 5 = -10\lambda,$$

из которых находим $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $y = 4$.

Ответ: $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $y = 4$.

Пример 3.7. Даны вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(-2; 4)$, $C(5; -6)$. Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$. Найти длину отрезка KC.

Решение. Пусть x_K и y_K – координаты точки K. Так как K делит сторону AB в отношении $\lambda = 2:1 = 2$, то, используя первые два равенства (3.8), находим

$$x_K = \frac{1 + 2\cdot(-2)}{1+2} = -1,\ y_K = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1+2} = 2,$$

следовательно, $K(-1; 2)$. Далее, используя равенства (3.6), определяем координаты x и y вектора $\overline{KC}$:

$$x = x_C - x_K = 5 - (-1) = 6,\ y = y_C - y_K = -6 - 2 = -8.$$

Далее, используя (3.7), находим длину отрезка *KC*, равную длине вектора $\overrightarrow{KC}$:

$$|\overrightarrow{KC}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: $|\overrightarrow{KC}| = 10$.

3.2. Проекция вектора. Скалярное произведение векторов

Прямая ℓ с заданным на ней положительным направлением называется *осью*. Пусть положительное направление оси ℓ определяет единичный вектор $\vec{e}$, тогда *проекцией вектора* $\vec{a}$ на ось ℓ называется число, обозначаемое $\text{пр}_\ell \vec{a}$ и определяемое формулой

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}}). \tag{3.9}$$

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат *Oxyz*, тогда координаты вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ определяются следующими равенствами:

$$x = \text{пр}_{Ox} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a},\ y = \text{пр}_{Oy} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a},\ z = \text{пр}_{Oz} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}. \tag{3.10}$$

Введем в рассмотрение углы $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{i}})$, $\beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{j}})$, $\gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{k}})$, которые образует вектор $\vec{a}$ с направляющими векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда формулы (3.10) с учетом (3.9) записываются в следующем виде:

$$x = |\vec{a}| \cos\alpha,\ y = |\vec{a}| \cos\beta,\ z = |\vec{a}| \cos\gamma. \tag{3.11}$$

Косинусы углов α, β, γ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ и, согласно (3.5), (3.11), вычисляются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Геометрический смысл направляющих косинусов вектора $\vec{n}$ состоит в том, что они являются координатами единичного вектора $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{a}$. Следовательно, согласно (3.5) направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.12}$$

Вектор $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ является *ортонормированным вектором (ортом) вектора* $\vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Пример 3.8. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти ортонормированный вектор $\vec{a}$.

Решение. Вычисляем модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6.$$

Находим направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ортонормированный вектор $\vec{a}$:

$$\vec{e} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Ответ: $\vec{e} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$.

Пример 3.9. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси: $X = 4$, $Y = 4$, $Z = -4\sqrt{2}$. Найти величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

Решение. Вектор силы $\vec{F}$ по условию имеет координаты $x = 4$, $y = 4$, $z = -4\sqrt{2}$. Тогда величина силы $\vec{F} = |\vec{F}|$, которую можно вычислить по формуле (3.5),

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{F}$ определим по формулам (3.11)

$$\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\gamma = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: сила $\vec{F} = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы: $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$.

Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и определяется формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right). \qquad (3.13)$$

Свойства скалярного произведения векторов

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
2. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.
4. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2$, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
5. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны или один из них нулевой.

Определение. *Проекцией вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ и равное $|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$. Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных с помощью координат в прямоугольном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, с помощью формулы (3.3) и свойств 2–4 выводится формула

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3.14}$$

Из (3.5) и (3.13) непосредственно выводится формула для вычисления косинуса угла, образованного векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{3.15}$$

Из определения скалярного произведения с учетом (3.5) и (3.14) непосредственно выводятся формулы для вычисления проекций векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, которые имеют следующий вид:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Пример 3.10. Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox и Oy углы, равные соответственно $\alpha = 120°$ и $\beta = 60°$. Найти: а) угол γ, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oz, если известно, что он острый; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 8$.

Решение. а) Используя формулу (3.12), находим

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как угол γ – острый, то $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, $\gamma = 45°$.

б) Используя формулы (3.11), вычисляем координаты вектора $\vec{a}$:

$$x = |\vec{a}|\cos 120° = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -4;\ y = |\vec{a}|\cos 60° = 8\cdot\frac{1}{2} = 4;$$

$$z = |\vec{a}|\cos 45° = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: а) $\gamma = 45°$; б) $x = -4,\ y = 4,\ z = 4\sqrt{2}$.

Пример 3.11. Найти угол между векторами $\vec{a} = (4; -1; -1)$ и $\vec{b} = (2; -2; 1)$.

Решение. Вначале, используя формулу (3.15), вычисляем косинус угла между заданными векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{4\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 1}{\sqrt{16+1+1}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а затем вычисляем угол $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \arccos\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Пример 3.12. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Из свойства 4 скалярного произведения следует справедливость равенства $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(2\vec{m} - 3\vec{n})^2}$. Используя свойства 1–3, вычисляем

$$(2\vec{m} - 3\vec{n})^2 = (2\vec{m} - 3\vec{n}, 2\vec{m} - 3\vec{n}) = 4(\vec{m}, \vec{m}) - 6(\vec{m}, \vec{n}) - 6(\vec{n}, \vec{m}) + 9(\vec{n}, \vec{n}) =$$

$$= 4|\vec{m}|^2 - 12|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) + 9|\vec{n}|^2 = 4\cdot 9 - 12\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4 = 36.$$

Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{36} = 6$.

Ответ: $|\vec{a}| = 6$.

Пример 3.13. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{m} = (2; -1; -2)$ и $\vec{n} = (1; 1; -4)$.

Решение. Пусть $\vec{p} = (x; y; z)$ – искомый единичный вектор, тогда согласно (3.5) имеет место равенство

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Из свойства 5 скалярного произведения и ортогональности векторов $\vec{m}, \vec{p}$ и $\vec{n}, \vec{p}$ следует справедливость еще двух равенств:

$$(\vec{m}, \vec{p}) = 2x - y - 2z = 0, \ (\vec{n}, \vec{p}) = x + y - 4z = 0.$$

Таким образом, для определения координат вектора $\vec{p}$ имеем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x + y - 4z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Складывая первые два уравнения, получим выражение x через z вида $x = 2z$. Подставив $2z$ вместо x в первое уравнение, находим $y = 2z$. Подставив найденные выражения x и y в третье уравнение, получим $9z^2 = 1$, откуда находим два значения $z_1 = \frac{1}{3}$ и $z_2 = -\frac{1}{3}$ для аппликаты вектора $\vec{p}$. Используя выражения $x = 2z$ и $y = 2z$, находим две абсциссы $x_1 = \frac{2}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$ и две ординаты $y_1 = \frac{2}{2}$, $y_2 = -\frac{2}{3}$, которые определяют два противоположно направленных вектора $\vec{p}_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\vec{p}_2 = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ: $\vec{p}_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\vec{p}_2 = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Пример 3.14. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = (2; -1; -4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(1; -2; 3)$ в положении $B(5; -6; 1)$.

Решение. В соответствии с физическим смыслом скалярного произведения $A = (\vec{F}, \vec{s})$, где A – работа; $\vec{F}$ – вектор действующей силы; $\vec{s}$ – вектор пути. Найдем вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$. По формулам (3.5) $\vec{s} = (5-1; -6-(-2); 1-3) = (4; -4; -2)$. Тогда по формуле (3.14) получим $A = (\vec{F}, \vec{s}) = 2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)(-4) = 20$ (ед. работы).

Ответ: 20.

3.3. Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал и наблюдении с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки (рис. 3.12).

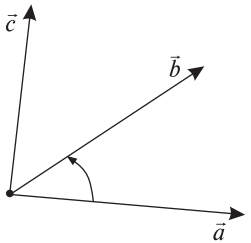


Рис. 3.12

В дальнейшем будем понимать правые тройки векторов.

Определение. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$, который определяется следующими условиями:

а) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

б) упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ правая;

в) длина вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, т. е.

$$\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$$

Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
4. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны ($\vec{o}$ называется *нулевым* вектором).

Если векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами, то разложение векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ имеет вид

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \qquad (3.16)$$

Пример 3.15. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; -1; 4)$, $B(3; 1; 6)$, $C(6; 2; 9)$.

Решение. Площадь S_{ABC} треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Следовательно, согласно первому условию из определения векторного произведения

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Вычислив с помощью (3.6) координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (4; 3; 5)$, по формуле (3.16) находим разложение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вида

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Затем вычисляем площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $S_{ABC} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3.16. Три силы $\vec{F}_1 = (2; 4; 6)$, $\vec{F}_2 = (1; -2; 3)$, $\vec{F}_3 = (1; 1; -7)$ приложены в точке $A(3; -4; 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующих этих сил относительно точки $B(4; -2; 6)$.

Решение. Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в точке M, а вектор $\vec{a} = \overline{NM}$, то вектор $[\vec{a}, \vec{F}]$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки N.

Находим равнодействующую трех данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,\ \vec{F} = \big(2+1+1; 4+(-2)+1; 6+3+(-7)\big) = (4; 3; 2).$$

Определяем координаты вектора:

$$\vec{a} = \overline{BA} = \big(3-4; -4-(-2); 8-6\big) = (-1; -2; 2).$$

По формуле (3.16) находим координаты вектора $[\vec{a}, \vec{F}]$:

$$[\vec{a}, \vec{F}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) = \big(-10; 10; 5\big).$$

Следовательно, величина момента равнодействующей

$$\big|[\vec{a}, \vec{F}]\big| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Направляющие косинусы момента силы определим по формулам (3.11):

$$\cos\alpha = \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\big|[\vec{a}, \vec{F}]\big| = 15$, $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{3}$.

Определение. *Смешанным произведением* упорядоченной тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т. е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \big([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\big)$.

Основные свойства смешанного произведения следующие:

1) $\left([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right)$;

2) $-(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) - (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;

4) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ тогда и только тогда, когда тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Если заданы векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то смешанное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.17)$$

Действительно, разложив с использованием формулы (1.10) данный определитель по третьей строке, из формулы для вычисления скалярного произведения (3.14) и определения смешанного произведения следует, что

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Если V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то

$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|. \qquad (3.18)$$

Пример 3.17. Доказать, что точки $A(1; 2, 3)$, $B(2; 4; 1)$, $C(1; -3, 6)$, $D(4; -2; 3)$ принадлежат одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, что равносильно согласно свойству 3) равенству нулю смешанного произведения $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Вычислив координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{AC}(0; -5; 3)$, $\overrightarrow{AD} = (3; -4; 0)$ по формуле (3.6), убеждаемся с помощью (3.17), что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости.

Ответ: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Пример 3.18. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; -1; 5)$, $B(5; 2; 6)$, $C(-1; 3; 4)$, $D(7; 3; -1)$.

Решение. Объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Следовательно, согласно формуле (3.18) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$. Определив с помощью (3.6) координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 4; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (4; 4; -6)$, по формуле (3.17) вычисляем их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -156,$$

а затем находим объем пирамиды $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|-156| = 26$.

Ответ: $V_{ABCD} = 26$.

3.4. Понятие векторного пространства

При введении на плоскости декартовой системы координат между векторами, принадлежащими плоскости, и упорядоченными парами действительных чисел x_1, x_2 устанавливается взаимно однозначное соответствие. Аналогичным образом устанавливается соответствие между векторами пространства и упорядоченными тройками чисел x_1, x_2, x_3, принадлежащих множеству действительных чисел **R**. Указанное соответствие позволяет ввести понятие n-мерного вектора.

Определение. Упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, называется *$n$-мерным вектором*, а числа x_i – его *компонентами*, $i = 1, \ldots, n$.

Многомерные векторы обозначаются латинскими строчными буквами $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ со стрелками вверху или выделяются жирным шрифтом $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Если компоненты вектора записаны в строку, то он называется *вектор-строкой* и обозначается $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$. В случае записи компонент столбцом вектор называется *вектор-столбцом* и обозначается

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } \vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^T.$$

Далее используется запись векторов в виде строк.

Два вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ называются равными, если их соответствующие компоненты равны:

$$x_i = y_i \text{ для всех } i = 1, \ldots, n. \tag{3.19}$$

Суммой двух n-мерных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x} + \vec{y}$, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n). \tag{3.20}$$

Произведением вектора $\vec{x}$ на действительное число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{x}$, компоненты которого равны произведению числа λ на соответствующие компоненты вектора $\vec{x}$:

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \ldots; \lambda x_n). \tag{3.21}$$

Введенные операции, выполняемые над векторами, обладают следующими свойствами:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность или переместительность);

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность или сочетательность);

3) существование такого вектора $\vec{o}$, что $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$, $\vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ для любого $\vec{x}$;

4) существование для любого $\vec{x}$ противоположного вектора $-\vec{x}$ такого, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o}$;

5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;

6) $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$;

7) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$;

8) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ (дистрибутивность).

Из равенств (3.20), (3.21) следует, что нулевой вектор $\vec{o}$ — это вектор, все компоненты которого равны нулю, а противоположным вектором для $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$.

Определение. Множество всех n-мерных векторов с введенными операциями сложения векторов и умножения их на число, которые удовлетворяют свойствам 1)–7), называется *векторным пространством* и обозначается V_n.

Подпространством векторного пространства V_n называется такое его подмножество $V \subset V_n$, которое обладает следующими свойствами:

а) для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ из V их сумма $\vec{x} + \vec{y}$ принадлежит V;

б) для любого $\vec{x}$ из V и любого числа λ из $\mathbf{R}$ вектор $\lambda\vec{x}$ принадлежит V.

Из четвертого свойства следует, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ найдется такой вектор $\vec{z}$, что $\vec{z} + \vec{y} = \vec{x}$. Вектор $\vec{z}$ называется *разностью* векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и обозначается $\vec{x} - \vec{y}$. Нетрудно проверить, что

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y}. \tag{3.22}$$

Действительно, $\vec{z}+\vec{y}=(\vec{x}-\vec{y})+\vec{y}=\vec{x}+\left((-1)\cdot\vec{y}+1\cdot\vec{y}\right)=\vec{x}+\vec{o}=\vec{x}$. Формула (3.22) позволяет выполнять в V_n операцию *вычитания*, результатом которой является разность двух векторов.

По аналогии с 3-мерным пространством в V_n определяется *скалярное произведение* двух векторов $\vec{x}=(x_1;\,x_2;\,\ldots;\,x_n)$ и $\vec{y}=(y_1;\,y_2;\,\ldots;\,y_n)$, которое обозначается $(\vec{x},\,\vec{y})$ и вычисляется по формуле

$$(\vec{x},\,\vec{y})=x_1y_1+\ldots+x_iy_i+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i. \qquad (3.23)$$

Введенное скалярное произведение позволяет определить длину n-мерного вектора $\vec{x}$, которая обозначается $|\vec{x}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{x}|=\sqrt{(\vec{x},\,\vec{x})}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_i^2+\ldots+x_n^2}. \qquad (3.24)$$

Векторное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется *евклидовым пространством* и обозначается E_n.

3.4.1. Ранг и базис системы векторов

Определение. Система векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$, принадлежащих V_n, называется *линейно зависимой*, если во множестве действительных чисел R существуют числа x_1, x_2, ..., x_k, не все равные нулю такие, что выполняется равенство

$$x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+\ldots+x_k\vec{v}_k=\vec{o}. \qquad (3.25)$$

Если равенство (3.25) выполняется только при $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$, то система векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ называется *линейно независимой*.

Свойства системы векторов

1. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда по крайней мере один из векторов системы линейно выражается через другие.
2. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она является линейно зависимой.
3. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
4. Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема векторов также независима.

Определение. Пусть V – произвольное множество векторов, принадлежащих V_n. Упорядоченная система векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k,\ldots,\vec{v}_s$ называется *базисом* в V, если выполняются следующие условия:

а) $\vec{v}_k\in V$ для всех $k=1, 2, ..., s$;

б) система векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_s$ линейно независима;

в) любой вектор $\vec{v} \in V$ является линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$, т. е. найдутся такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_s$, что

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_s\vec{v}_s = \sum_{k=1}^{s} x_k\vec{v}_k. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) называется *разложением вектора* $\vec{v}$ *по базису* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$. Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_s$ однозначно определяются вектором $\vec{v}$ и называются его координатами в базисе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$.

Для векторов пространства V_n справедливы утверждения:

1) любое множество векторов V имеет хотя бы один базис, при этом все базисы в V имеют одинаковое число векторов, которое называется *рангом* множества V и обозначается $\operatorname{rank} V$ или $r(V)$;

2) ранг всего пространства V_n равен n и называется размерностью этого пространства, которая обозначается $\dim V$;

3) система единичных векторов следующего вида:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = (1;\, 0;\, 0;\, \cdots;\, 0),\\ &\vec{e}_2 = (0;\, 1;\, 0;\, \cdots;\, 0),\\ &\vec{e}_3 = (0;\, 0;\, 1;\, \cdots;\, 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\vec{e}_n = (0;\, 0;\, 0;\, \ldots;\, 1) \end{aligned} \tag{3.27}$$

образует в V_n базис, который называется *каноническим*;

4) ранг системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_m$, принадлежащих пространству V_n, равен рангу матрицы размера $m \times n$, элементами i-й строки которой являются соответствующие компоненты вектора $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при этом строки матрицы, в которых расположен ее базисный минор, определяют базис исходной системы векторов.

Пусть в V_n выбран некоторый базис

$$\begin{aligned} &\vec{a}_1 = (a_{11};\, a_{21};\, \ldots;\, a_{i1};\, \ldots;\, a_{n1}),\\ &\vec{a}_2 = (a_{12};\, a_{22};\, \ldots;\, a_{i2};\, \ldots;\, a_{n2}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\vec{a}_j = (a_{1j};\, a_{2j};\, \ldots;\, a_{ij};\, \ldots;\, a_{nj}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\vec{a}_n = (a_{1n};\, a_{2n};\, \ldots;\, a_{in};\, \ldots;\, a_{nn}) \end{aligned}$$

и вектор $\vec{b} = (b_1;\, b_2;\, \ldots;\, b_i;\ldots;\, b_n)$.

Для нахождения координат x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n$ достаточно записать для вектора $\vec{b}$ разложение $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_j\vec{a}_j + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ вида (3.26), вычислить компоненты правой части векторного равенства по формуле

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

и согласно формуле (3.19) приравнять их соответствующим компонентам вектора $\vec{b}$. В результате получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n1} \end{cases} \qquad (3.28)$$

для определения координат вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n$.

С помощью системы линейных уравнений решается также задача выявления линейной зависимости или независимости заданной системы n-мерных векторов. *Достаточным условием линейной зависимости* является существование ненулевых решений системы однородных линейных уравнений, определяемой векторным равенством (3.25).

Замечание 3.2. Следует различать компоненты вектора и его координаты в заданном базисе. Компонентами n-мерного вектора $\vec{x}$ является первоначальный упорядоченный набор чисел, определяющий его, в то время как координаты вектора вычисляются посредством решения системы линейных уравнений (3.28). Следует помнить, что только в каноническом базисе координаты вектора совпадают с его компонентами. В связи с этим координаты n-мерного вектора $\vec{x}$ в фиксированном базисе будем записывать в круглых скобках сразу после буквенного обозначения вектора $\vec{x}$, т. е. использовать запись $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Пример 3.19. Выяснить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $\vec{v}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{v}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{v}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{v}_4 = (2; 3; 1; 0)$;

б) $\vec{v}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{v}_2 = (2; 1; 1)$, $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)$;

в) $\vec{v}_1 = (1; 3; 1; 3)$, $\vec{v}_2 = (2; 1; 1; 2)$, $\vec{v}_3 = (3; -1; 1; 1)$.

Решение. а) Так как $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ принадлежат векторному пространству V_4, то при выборе канонического базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ в силу равен-

ства нулю четвертой компоненты вектора $\vec{v}_4$ имеет место разложение $\vec{v}_4 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Далее, так как $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, то данная система векторов линейно зависима.

б) Для заданной системы векторов векторное равенство имеет вид

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{o},$$

где $\vec{o} = (0; 0; 0)$ — нулевой вектор. Вычисляя компоненты линейной комбинации $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ (напомним, что они равны аналогичной линейной комбинации соответствующих компонент векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$) и приравнивая их нулю, получим систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы коэффициентов системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = -4$$

не равен нулю. Следовательно, однородная система линейных уравнений имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, т. е. система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ линейно независима.

в) По аналогии с решением задачи б) запишем для векторного равенства $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{o}$ систему однородных линейных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Выполнив прямой ход метода Гаусса, получим эквивалентную ступенчатую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Объявляя переменную x_3 свободной, а x_1, x_2 — базисными и выражая x_1, x_2 через x_3, находим общее решение $x_1 = x_3$, $x_2 = -2x_3$ ступенчатой и, следовательно, исходной системы однородных линейных уравнений. Полагая далее $x_3 = 1$ и вычисляя $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, убеждаемся в существовании тройки

ненулевых чисел $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$, для которых выполняется равенство $\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{o}$. Таким образом, данная система векторов линейно зависима.

Ответ: а) данная система векторов линейно зависима; б) данная система векторов линейно независима; в) данная система векторов линейно зависима.

Пример 3.20. Найти базис заданной системы векторов и определить координаты векторов системы в найденном базисе:

а) $\vec{v}_1 = (3; -1; 0)$, $\vec{v}_2 = (2; 3; 1)$, $\vec{v}_3 = (-1; 4; 3)$, $\vec{v}_4 = (2; 3; 7)$;

б) $\vec{v}_1 = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{v}_2 = (-1; 3; 2; 1)$, $\vec{v}_3 = (4; 3; 3; 5)$, $\vec{v}_4 = (2; -1; 0; 1)$.

Решение. а) Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ принадлежат векторному пространству V_3. Следовательно, ранг данной системы векторов не больше 3, т. е. ее базис содержит не более трех векторов. В силу утверждения 4) ранг системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ равен рангу матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Проверка показывает, что определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

матрицы A не равен нулю. Следовательно, ее ранг и ранг системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ равны 3. Таким образом, векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ линейно независимы и образуют базис исходной системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, так как ранг последней не более 3.

Из очевидных равенств $\vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3$, $\vec{v}_3 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 1 \cdot \vec{v}_3$ следует, что координатная форма записи первых трех векторов заданной системы имеет вид $\vec{v}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{v}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{v}_3 = (0; 0; 1)$.

Для определения координат вектора $\vec{v}_4$ в базисе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ запишем его разложение $\vec{v}_4 = x_1\vec{v} + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ по указанному базису, составим соответствующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

и, используя метод Гаусса, найдем ее решение: $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 3$. Следовательно, вектор $\vec{v}_4$ в базисе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ имеет следующий вид: $\vec{v}_4 = (3, -2, 3)$.

б) Составим из компонент векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ матрицу A и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к эквивалентной ступенчатой матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг последней равен 3, так как ее определитель равен нулю, а минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

отличен от нуля. Следовательно, ранг матрицы A также равен 3, так как ранги эквивалентных матриц совпадают. Проверка показывает, что минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

матрицы A, расположенный в первых трех строках и столбцах, также отличен от нуля. Следовательно, в качестве базиса заданной системы векторов можно выбрать $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

По аналогии с решением задачи а) убеждаемся в том, что в выбранном базисе координатная запись первых трех векторов имеет вид $\vec{v}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{v}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{v}_3 = (0; 0; 1)$.

Для определения координат вектора $\vec{v}_4$ в базисе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ запишем его разложение $\vec{v}_4 = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ по этому базису. Далее составим соответствующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

и методом Гаусса найдем ее решение: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, разложение вектора $\vec{v}_4$ в базисе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ имеет вид $\vec{v}_4 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$.

Ответ: а) $\vec{v}_4 = (3, -2, 3)$; б) $\vec{v}_4 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$.

3.5. Координаты центра масс активированного комплекса

Основная идея теории активированного комплекса (переходного состояния) заключена в том, что в процессе любой химической реакции переход начальной конфигурации атомов в конечную обусловлен изменением межатомных расстояний.

Пусть, например, рассматривается реакция двухатомной молекулы XY с одним атомом Z, т. е. $XY + Z = X + YZ$. В первый момент межатомные расстояния между X, Y и Y, Z соответственно равны r_1 и r_2 (рис. 3.13). В ходе реакции они начинают изменяться: r_1 увеличивается, а r_2 уменьшается. Тогда промежуточные расстояния между атомами активированного комплекса будут равны r_1' и r_2'. В более сложных молекулярных структурах изменение межатомных расстояний в реакции может повлечь изменение углов между атомами.

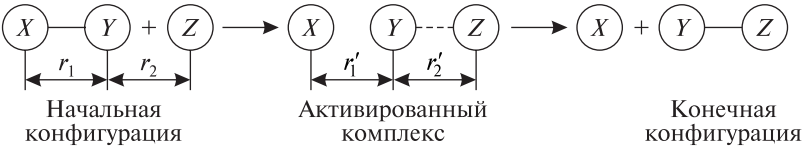


Рис. 3.13

Рассмотрим в качестве примера [16, с. 36–37] [13, гл. I, § 5 и гл. III, § 3] реакцию

$$C_2H_4 + Cl^{\bullet} \rightarrow C_2H_4Cl^{\bullet} \qquad (3.29)$$

и построим модель ее активированного комплекса. Для этого, считая, что все атомы молекулы этилена лежат в плоскости Oxy, на основании теории активированного комплекса сделаем следующие предположения:

1) связь C–C имеет длину 1,44 А, среднюю между длиной связи C–C в этилене, равной 1,34 А, и длиной связи C–C в образующемся свободном радикале C_2H_4Cl, равной 1,54 А; все связи C–H сохраняют постоянную длину 1,07 А (модель этилена представлена на рис. 3.14);

2) углы при атоме C_1: $\angle H_1C_1C_2 = \angle H_2C_1C_2 = \angle H_1C_1H_2 = 115°$, т. е. равны среднему значению между 120° в этилене и 109° в свободном радикале C_2H_4Cl; углы при C_2 сохраняют постоянное значение, равное 120°;

3) атом Cl приближается к молекуле этилена в направлении, перпендикулярном плоскости этой молекулы. В активированном комплексе угол $\angle ClC_1C_2 = 100°$, т. е. среднему значению между прямым углом и углом 109° в образующемся свободном радикале. Расстояние между Cl и C_1 примем равным 2,00 А, т. е. несколько больше, чем в C_2H_4Cl.

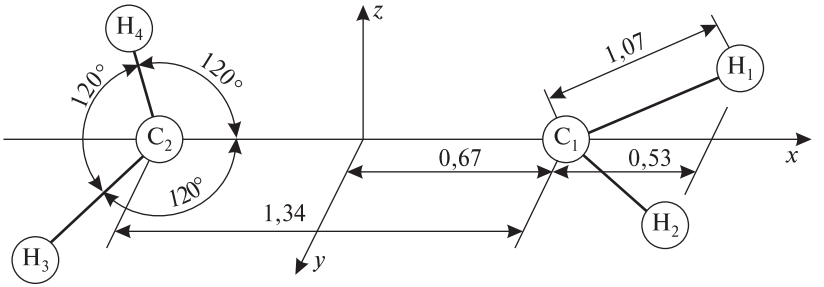


Рис. 3.14

Предполагаемая конфигурация активированного комплекса реакции (3.29) изображена на рис. 3.15.

Задача. Конфигурация активированного комплекса реакции (3.29) имеет вид, изображенный на рис. 3.15. Найти координаты центра масс активированного комплекса, если известно, что координаты центра масс любой материальной системы, состоящей из n материальных точек, вычисляются по формуле

$$x_{c_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{3.30}$$

где $x_j^{(i)}$ – i-я координата j-й точки, в которой сосредоточена масса m_j; $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$.

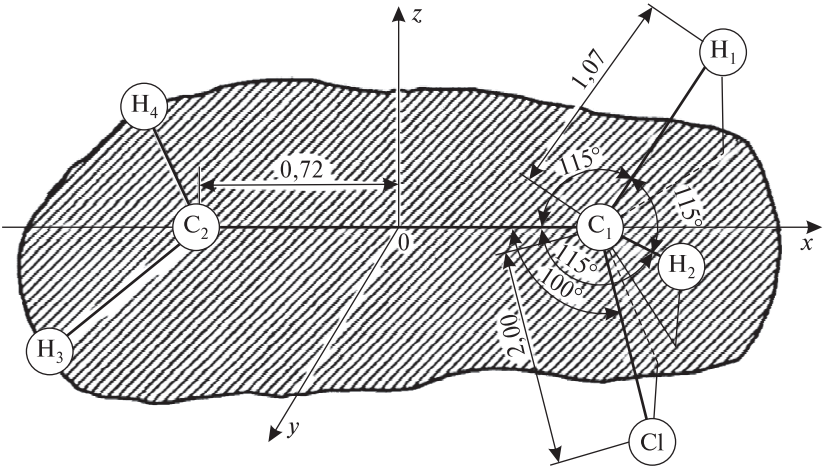


Рис. 3.15

Решение. Центром масс системы называют точку, которая обладает тем свойством, что ее статический момент относительно любой оси (или точки) равен статическому моменту системы относительно той же оси (или точки). Чтобы воспользоваться формулами (3.30), необходимо знать атомные массы и координаты атомов, входящих в конфигурацию, изображенную на рис. 3.14. Атомные массы известны:

$$M_{\text{H}} = 1{,}01;\ M_{\text{C}} = 12{,}01;\ M_{\text{Cl}} = 35{,}45.$$

Найдем теперь координаты атомов. Так как связь С–С имеет длину 1,44 А, то в силу того, что C_1 и C_2 находятся на оси *Ox* и симметричны началу координат, имеем: $C_1(0{,}72;\,0;\,0)$, $C_2(-0{,}72;\,0;\,0)$.

Из предположения 1 следует, что первые и третьи координаты H_1 и H_2 равны, а вторые – противоположны по знаку. Поэтому достаточно найти, например, координаты H_1. Для этого определим длину вектора $\overrightarrow{C_1H_1}$ и скалярные произведения $\overrightarrow{C_1H_1}\cdot\overrightarrow{C_2H_2}$ и $\overrightarrow{C_1O}\cdot\overrightarrow{C_1H_1}$ через соответствующие координаты:

$$(x-0{,}72)^2 + y^2 + z^2 = 1{,}07^2;$$

$$(x-0{,}72)^2 - y^2 + z^2 = 1{,}07^2\cos 115°;$$

$$(x-0{,}72)(-0{,}72) = 1{,}07\cdot 0{,}72\cos 115°,$$

где x, y, z – координаты точки H_1, а $\cos 115° = -0{,}42$.

Решая эту систему, получаем координаты точек

$$H_1(1{,}17;\,-0{,}89;\,0{,}41)\ \text{и}\ H_2(1{,}17;\,0{,}89;\,0{,}41).$$

Так как атом Cl находится в плоскости *Oxz*, то вторая координата его равна нулю. Для нахождения же координат x и z вычислим $\overrightarrow{C_1Cl}$, скалярное произведение $\overrightarrow{C_1O}\cdot\overrightarrow{C_1Cl}$ и учтем предположение 3:

$$(x-0{,}72)^2 + z^2 = 4;$$

$$(x-0{,}72)(-0{,}72) = 2\cdot 0{,}72\cos 100°,$$

где x и z – координаты точки Cl; $\cos 100° = -0{,}17$.

Из последней системы получаем $x = 1{,}06$, $z = -1{,}97$. Значит, атом хлора имеет координаты $Cl(1{,}06;\,0;\,-1{,}97)$.

При нахождении координат H_3 и H_4 учтем, что эти атомы находятся в плоскости молекулы этилена и, следовательно, их третьи координаты равны нулю. Далее, учитывая предположения 1 и 2, находим $\left|\overrightarrow{C_2H_4}\right|$ и скалярное произведение $\overrightarrow{C_2H_4}\cdot\overrightarrow{C_2O}$:

$$(x+0{,}72)^2 + y^2 = 1{,}07^2;$$

$$(x+0,72)\cdot 0,72 = 0,72\cdot 1,07\cos 120°,$$

где x и y — координаты точки H_4. Из последней системы находим, что $x = -1,25$, а $y = -0,93$. Значит,

$$H_4(-1,25; -0,93; 0).$$

Так как атомы H_3 и H_4 располагаются симметрично относительно оси Ox, то

$$H_3(-1,25; 0,93; 0).$$

Полученные результаты запишем в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Координаты, А	Атом							
	C_1	C_2	H_1	H_2	H_3	H_4	Cl	Сумма масс
x_i	0,72	–0,72	1,17	1,17	–1,25	–1,25	1,06	–
y_i	0	0	–0,89	0,89	0,93	–0,93	0	–
z_i	0	0	0,41	0,41	0	0	–1,97	–
Атомная масса M_i	12,01	12,01	1,01	1,01	1,01	1,01	35,45	$\sum_i M_i = 63,51$

Зная координаты всех атомов активированного комплекса и их массы, можно найти координаты центра масс:

$$x_c = \frac{1}{63,51}(-0,72\cdot 12,01 + 0,72\cdot 12,01 + 2\cdot 1,17\cdot 1,01 -$$

$$-2\cdot 1,25\cdot 1,01 + 1,06\cdot 35,45) = 0,59;$$

$$y_c = \frac{1}{63,51}(-0,89\cdot 1,01 + 0,89\cdot 1,01 + 0,93\cdot 1,01 - 0,93\cdot 1,01) = 0;$$

$$z_c = \frac{1}{63,51}(0,41\cdot 1,01 + 0,41\cdot 1,01 - 1,97\cdot 35,45) = -1,04.$$

Ответ: координаты центра масс активированного комплекса $x_c = 0,59$; $y_c = 0$; $z_c = -1,04$.

Замечание. Во многих химических превращениях важную роль играет образование разного рода комплексов реагирующих частиц. При этом иногда необходимо знать координаты центра масс образовавшегося комплекса, чтобы осуществить параллельный перенос системы координат

$$x = X + x_0;\ y = Y + y_0;\ z = Z + z_0$$

в точку $(x_0; y_0; z_0)$, совпадающую с центром масс. Такая необходимость возникает, например, при вычислении предэкспоненциального множителя и стерического фактора [16, гл. III, § 3], что требуется для расчета константы скорости бимолекулярной реакции.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. В параллелограмме $ABCD$ обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3.2. Дан треугольник ABC, в котором обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$. Выразить векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{CM}$, где K, L, M – основания медиан, через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3.3. В треугольнике ABC отрезок AK – медиана, обозначим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AK} = \vec{p}$. Изобразить графически и разложить: а) вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$; б) вектор $\vec{m}$ по векторам $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

3.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N являются соответственно серединами сторон BC и CD. Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$ и изобразить его графически.

3.5. В трапеции $ABCD$ стороны BC, AD параллельны и $BC : AD = 1 : 3$. Выразить вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$.

3.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O (центр тяжести). Выразить векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ через $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$.

3.7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$.

3.8. Задан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$.

3.9. Найти значение z, при котором векторы $\vec{a} = (-2; 4; z)$ и $\vec{b} = (-8; 16; 24)$ коллинеарны.

3.10. Даны точки $A(0; 3)$, $B(2; 1)$, $C(5; -1)$, $D(9; -3)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

3.11. Заданы три вершины $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $C(10; 4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

3.12. Даны координаты вершин $A(1; 2)$ и $B(3; 4)$ и медиана AK треугольника ABC, где $\overrightarrow{AK} = (4; -1)$. Найти координаты вершины C.

3.13. Найти значения координаты x вектора $\vec{a} = (x; 3; -4)$, если $|\vec{a}| = \sqrt{61}$.

3.14. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m} = (3; 4; -2)$ и $\vec{n} = (-1; 2; 5)$.

3.15. Дан треугольник ABC, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (7; 2; 4)$. Найти длину стороны BC.

3.16. Даны точки $A(2; 3; -1)$, $B(8; 12; -4)$. Найти координаты точек, делящих отрезок AB на три равные части.

3.17. Даны вершины $A(4; -1)$, $B(5; 5)$, $C(-3; 1)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

3.18. На отрезке AB выбрана такая точка K, что $AK : KB = 1 : 4$. Найти координаты точки B, если $A(1; -2; 5)$ и $K(3; -1; 1)$.

3.19. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

а) $\vec{a} = (2; -5)$, $\vec{m} = (1; 3)$, $\vec{n} = (2; 5)$;

б) $\vec{a} = (4; 5)$, $\vec{m} = (3; 2)$, $\vec{n} = (2; 1)$.

3.20. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, если:

а) $\vec{a} = (6; 1; 4)$, $\vec{m} = (4; 5; 1)$, $\vec{n} = (3; 2; 1)$, $\vec{p} = (2; 3; 2)$;

б) $\vec{a} = (10; -1; 0)$, $\vec{m} = (3; 1; -1)$, $\vec{n} = (2; -1; 2)$, $\vec{p} = (3; 2; 1)$.

3.21. Отметить точку $M(4; -3; 5)$ и определить длину и направление ее радиус-вектора.

3.22. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Изобразить вектор $\overrightarrow{AB}$, найти его проекции на оси координат и его направляющие косинусы.

3.23. Разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектор $\vec{a}$ длиной $4\sqrt{2}$, образующий с осями координат Ox, Oy, Oz углы, равные соответственно $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

3.24. Вектор $\vec{a}$ образует с осями Ox и Oz углы, равные соответственно $\alpha = 60°$ и $\gamma = 45°$. Найти: а) угол β, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oy, если известно, что он тупой; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.

3.25. Найти координаты вектора $\vec{a}$, образующего равные острые углы с осями координат, если $\vec{a}^2 = 12$.

3.26. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

3.27. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых равны $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, образуют угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти: а) $(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; в) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

3.28. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные ортогональные векторы.

3.29. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$ и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{3}$.

3.30. Найти длину вектора $\vec{a} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$.

3.31. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{3}$.

3.32. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (6; -1; 1)$ и $\vec{b} = (2; 3; 1)$.

3.33. Найти угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные ортогональные векторы.

3.34. Найти угол между векторами $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, а $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.

3.35. Найти угол, образованный биссектрисами координатных углов $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$ и $(\widehat{\vec{j}, \vec{k}})$.

3.36. Из вершины квадрата проведены две прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

3.37. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов треугольной пирамиды, имеющих общую вершину, если все ребра пирамиды равны.

3.38. Даны точки $A(2; -3; 4)$, $B(5; -5; -2)$, $C(1; 2; 3)$, $D(7; 4; 6)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$.

3.39. Даны векторы $\vec{a} = (1; -1; 4)$ и $\vec{b} = (1; 1; 2)$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ и вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

3.40. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (2; -3; 4)$ на ось, образующую равные углы с осями координат.

3.41. Найти значение λ, при котором векторы $\vec{m} = (-\lambda; 3; 2)$ и $\vec{n} = (1; 2; -\lambda)$ ортогональны.

3.42. Найти вектор единичной длины, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{p} = (12; 5; -13)$ и образующий острый угол с осью Ox.

3.43. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{m} = (1; -3; 0)$ и $\vec{n} = (-3; 3; 4)$ и образующий тупой угол с осью Oy.

3.44. Найти все векторы, ортогональные векторам $\vec{m} = (1; 1; -1)$ и $\vec{n} = (1; -5; 1)$.

3.45. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ и $|[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]|$.

3.46. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 10$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 8$.

3.47. Найти и построить в системе координат $Oxyz$ вектор $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$, если:
а) $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{k}$; б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{j}+3\vec{k}$.

3.48. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$.

3.49. Доказать равенство $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]=3[\vec{a},\vec{b}]$.

3.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

3.51. Известно, что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ и $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q}$.

3.52. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AC}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\overrightarrow{BD}=5\vec{p}-4\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ и $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.

3.53. Даны вершины $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$, $C(6;2;0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B.

3.54. Даны вершины $A(3;-1;4)$, $B(2;4;5)$, $C(4;4;5)$ треугольника. Найти его площадь.

3.55. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}=6\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$.

3.56. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, и в случае некомпланарности определить, правой или левой является тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:
а) $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(2;3;-1)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$;
б) $\vec{a}=(3;-1;2)$, $\vec{b}=(2;1;-1)$, $\vec{c}=(3;-2;1)$;
в) $\vec{a}=(4;1;1)$, $\vec{b}=(2;0;3)$, $\vec{c}=(-6;2;-4)$.

3.57. Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=(7;\alpha;-13)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$ и $\vec{c}=(3;1;-2)$ компланарны.

3.58. Определить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ в одной плоскости.

3.59. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(1;5;-1)$, $\vec{b}=(3;1;-2)$, $\vec{c}(-4;0;3)$.

3.60. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $S(3;2;4)$, $A(1;-2;1)$, $B(7;9;4)$, $C(5;4;3)$.

3.61. Точки $S(0;3;7)$, $A(2;0;4)$, $B(0;0;6)$, $C(4;3;5)$ являются вершинами треугольной пирамиды. Найти длину ее высоты, проведенной из вершины S.

3.62. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD_1}$.

3.63. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – базис. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ в этом базисе.

3.64. Определить, являются ли линейно зависимыми системы векторов:

а) $\vec{x}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 0; 1)$, $\vec{x}_3 = (1; 1; 0; 1)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 3; 2; -1)$, $\vec{x}_2 = (3; 4; 3; 0)$, $\vec{x}_3 = (2; 1; 1; 1)$;

в) $\vec{x}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{x}_3 = (1; 1; 0; 1)$;

г) $\vec{x}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (0; 0; 1; 1)$, $\vec{x}_3 = (2; 2; 3; 3)$;

д) $\vec{x}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 1; 1)$, $\vec{x}_3 = (0; 0; 1; 1)$, $\vec{x}_4 = (-1; -1; 0; 0)$.

3.65. Установить, существует ли линейная зависимость между векторами нижеследующих систем:

а) $\vec{x}_1 = (1; 3; -1)$, $\vec{x}_2 = (0; 2; 1)$, $\vec{x}_3 = (0; 0; 5)$;

б) $\vec{x}_1 = (3; 2; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 0; 2)$, $\vec{x}_3 = (-1; -1; 4)$;

в) $\vec{x}_1 = (7; 0; 1)$, $\vec{x}_2 = (5; 2; -3)$, $\vec{x}_3 = (1; -1; 2)$;

г) $\vec{x}_1 = (4; 4; 2; -1)$, $\vec{x}_2 = (0; 0; -3; 7)$, $\vec{x}_3 = (0; 3; 5; 1)$;

д) $\vec{x}_1 = (3; 1; -2; 1)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 4; -1)$, $\vec{x}_3 = (1; -3; 5; 1)$, $\vec{x}_4 = (2; 8; -6; 2)$.

3.66. Найти базис системы векторов и записать координаты векторов системы в найденном базисе:

а) $\vec{x}_1 = (1; -2; 5)$, $\vec{x}_2 = (-2; 4; -10)$, $\vec{x}_3 = (3; -6; 15)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 0; 2)$, $\vec{x}_2 = (1; 1; -2)$, $\vec{x}_3 = (1; -2; 10)$, $\vec{x}_4 = (3; 2; -1)$;

в) $\vec{x}_1 = (4; -1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 5)$, $\vec{x}_3 = (0; -7; -7)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; -4)$;

г) $\vec{x}_1 = (2; 1; -3)$, $\vec{x}_2 = (1; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (3; -4; 5)$, $\vec{x}_4 = (2; 9; -12)$;

д) $\vec{x}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (1; 2; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (2; 3; 5; 0)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; 4; -1)$.

3.67. Выяснить, образуют ли нижеследующие системы векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ базис векторного пространства V_3:

а) $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 1)$;

б) $\vec{x}_1 = (2, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, -3, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 4)$;

в) $\vec{x}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 0)$;

г) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (-2, -4, -6)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 0)$;

д) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (-1, 2, -1)$, $\vec{x}_3 = (0, 4, 0)$.

3.68. Найти значение параметра λ, при котором векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ образуют базис пространства V_3:

а) $\vec{x}_1 = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 5)$;

б) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, \lambda)$;

в) $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 4, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, \lambda)$.

3.69. Выяснить, будет ли система векторов $3\vec{x}_1$, $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_2$ линейно независимой, если векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ линейно независимы.

3.70. Заданы разложения векторов $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ и $\vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Найти значения параметров α и β, при которых они линейно независимы.

3.71. Проверить, образуют ли базис нижеследующие системы векторов, если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – базис векторного пространства V_3:

а) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$;

б) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

Задачи с физическим содержанием для самостоятельного решения с применением методов векторной алгебры

3.72. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси: $X = 2\sqrt{2}$, $Y = -2$, $Z = 2$. Найти величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

3.73. Сила $\vec{F}$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = \beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Найти проекции вектора силы, если ее величина $|\vec{F}| = 6$.

3.74. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = (4; -2; 2)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2; -1; -2)$ в положении $B(6; -5; 2)$.

3.75. Три силы $\vec{F}_1 = (2; -5; 1)$, $\vec{F}_2 = (1; 2; -6)$, $\vec{F}_3 = (-4; -3; 3)$ приложены в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(4; 2; -8)$ в точку $B(3; -2; -5)$.

3.76. Даны две силы $\vec{F}_1 = (4; 1; 3)$, $\vec{F}_2 = (-2; 2; 1)$, приложенные в точке $A(6; -6; -3)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно: а) начала координат; б) точки $B(5; -8; -5)$.

3.77. Сила $\vec{F} = (3; 4; -2)$ приложена к точке $A(2; -1; -2)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

3.78. Минерал неизвестного состава имеет форму параллелепипеда. Ребра, выходящие из одной из общих вершин, заданы координатами векторов $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (3; 4; 5)$, $\vec{c} = (5; 6; 9)$. Масса минерала составляет 8 кг. Найти его плотность.

3.79. Минерал имеет форму параллелепипеда с вершинами $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Даны координаты точек $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $D(6; 2; 3)$, $A_1(3; 7; 2)$. По сечению плоскостью, проходящей через вершины A_1BD, произведен распил. Определить объем оставшейся части минерала.

Контрольные задания

Вариант 1

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 3 : 1$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(3; 2; -1)$, $B(1; -4; 3)$, $C(0; 3; -1)$, $D(-6; 3; 5)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении 1 : 2;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (1; 2; 6)$, $|\vec{x}| = \sqrt{10}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(3; 2; -1)$, $B(1; -4; 3)$, $C(0; 3; -1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(1; 2; 3)$, $B(2; 6; 7)$, $C(3; 5; -1)$, $D(9; 5; 4)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (4; 7; 2)$, $\vec{c} = (6; 4; 2)$, $\vec{d} = (14; 18; 6)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 2

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 2 : 3$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(3; 2; -1)$, $B(-3; -4; 5)$, $C(1; 3; -4)$, $D(6; 3; -4)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка CD, а точка N делит отрезок AB в отношении 1 : 4;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3; 0; -3)$, $\vec{b} = (1; 4; 1)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (6; 1; 7)$, $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3; 2; 1)$, $B(4; -1; 3)$, $C(3; 0; -1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2; 1; 3)$, $B(4; 5; 2)$, $C(5; 1; 0)$, $D(8; -5; 6)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (2; -1; 11)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 1; 2)$, $\vec{d} = (2; 5; 6)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 3

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 1 : 3$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(2; 3; -1)$, $B(4; -1; 3)$, $C(-6; 5; 3)$, $D(0; -1; 3)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении $2 : 1$;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-1; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (-4; -3; 6)$, $|\vec{x}| = 2\sqrt{5}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(0; -2; 5)$, $B(1; 4; 3)$, $C(6; 3; -1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; 2; 1)$, $B(5; 4; 2)$, $C(4; 3; -2)$, $D(-5; 6; 7)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (8; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 6; 10)$, $\vec{c} = (3; -2; 1)$, $\vec{d} = (7; 4; 11)$. Выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 4

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 3 : 2$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(5; -2; 4)$, $B(-1; -4; 2)$, $C(0; 3; 1)$, $D(-4; 3; 5)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении $1 : 3$;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (5; 3; 2)$, $\vec{b} = (1; 5; -2)$.

4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (2; 5; 0)$, $|\vec{x}| = 3$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3; -2; 1)$, $B(0; 3; -1)$, $C(2; 0; 1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-3; -2; 1)$, $B(0; 3; -1)$, $C(2; 0; 1)$, $D(-4; 2; 3)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (10; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; 4; 2)$, $\vec{c} = (3; 9; 2)$, $\vec{d} = (19; 30; 7)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 5

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 3 : 4$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(3; 2; 0)$, $B(-1; -4; 2)$, $C(4; -3; 5)$, $D(0; -3; 1)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении $3 : 1$;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3; 0; 3)$, $\vec{b} = (-1; -2; 1)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (7; -2; 5)$, $|\vec{x}| = \sqrt{29}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(4; 5; 1)$, $B(0; -3; -2)$, $C(2; 0; -4)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(4; 5; 1)$, $B(0; 3; -2)$, $C(2; 0; -4)$, $D(-7; 1; 2)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (2; 4; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; 6)$, $\vec{c} = (5; 3; 1)$, $\vec{d} = (24; 20; 6)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 6

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 2 : 5$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(5; -1; -1)$, $B(1; 3; 5)$, $C(6; 5; 3)$, $D(1; 5; -2)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении $4 : 1$;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2;\,2;\,0)$, $\vec{b}=(-2;\,2;\,-4)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+3\vec{n}$, если $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Oy и вектору $\vec{p}$, образует тупой угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p}=(3;\,-6;\,4)$, $|\vec{x}|=30$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;\,-2;\,4)$, $B(3;\,4;\,1)$, $C(1;\,-2;\,-1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;\,-2;\,4)$, $B(3;\,4;\,1)$, $C(1;\,-2;\,-1)$, $D(-1;\,4;\,-5)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a}=(4;\,7;\,8)$, $\vec{b}=(4;\,7;\,8)$, $\vec{c}=(9;\,1;\,3)$, $\vec{d}=(2;\,-4;\,4)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 7

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK:KC=$ $=3:5$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(-5;\,2;\,-4)$, $B(1;\,-4;\,2)$, $C(0;\,3;\,4)$, $D(5;\,3;\,4)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении $2:3$;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(5;\,2;\,3)$, $\vec{b}=(-1;\,2;\,-5)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=\vec{m}-4\vec{n}$ и $\vec{b}=4\vec{m}-\vec{n}$, если $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Oy и вектору $\vec{p}$, образует тупой угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p}=(9;\,7;\,12)$, $|\vec{x}|=20$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;\,0;\,-1)$, $B(4;\,-3;\,1)$, $C(-3;\,5;\,-3)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;0;-1)$, $B(4;\,-3;\,1)$, $C(-3;\,5;\,-3)$, $D(4;\,-2;\,3)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a}=(2;\,3;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,3;\,1)$, $\vec{c}=(1;\,1;\,3)$, $\vec{d}=(5;\,1;\,11)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 8

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK:KC=$ $=5:2$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

2. Для данных точек $A(-4; 1; 3)$, $B(2; -3; 5)$, $C(-1; -3; 4)$, $D(5; 3; 4)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении 1 : 5;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-6; 0; 6)$, $\vec{b} = (-2; -8; -2)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен оси Oy и вектору $\vec{p}$ и образует тупой угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (8; 12; 8)$, $|\vec{x}| = 3\sqrt{2}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2; 1; 3)$, $B(4; -5; 7)$, $C(3; 6; -4)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-2;1;3)$, $B(4; -5; 7)$, $C(3; 6; -4)$, $D(5; -2; 2)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (7; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 5; 4)$, $\vec{c} = (-3; 1; 2)$, $\vec{d} = (-3; 14; 10)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 9

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 5 : 3$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(-7; 4; 9)$, $B(3; -2; -5)$, $C(-1; 4; -3)$, $D(9; 4; 2)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении 3 : 2;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (2; 2; 0)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Oy и вектору $\vec{p}$, образует тупой угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (0; -4; -9)$, $|\vec{x}| = 1$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(7; 11; -3)$, $B(4; 5; -7)$, $C(3; 5; -1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(7; 11; -3)$, $B(4; 5; -7)$, $C(3; 5; -1)$, $D(6; 4; -2)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (1; 2; 4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (2; 2; 4)$, $\vec{d} = (-1; -4; -2)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Вариант 10

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK : KC = 3 : 7$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Для данных точек $A(10; -6; 1)$, $B(-4; 2; 3)$, $C(1; 3; -2)$, $D(7; 3; -2)$ найти:
   а) координаты вектора $\overrightarrow{KN}$, где K – середина отрезка AB, а точка N делит отрезок CD в отношении 5 : 1;
   б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-2; 5; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 5)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = 60°$.
5. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Ox и вектору $\vec{p}$, образует острый угол с осью Oy. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{p} = (20; -3; -15)$, $|\vec{x}| = 25$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(3; -5; 2)$, $B(1; -2; 1)$, $C(2; 1; 6)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; -5; 2)$, $B(1; -2; 1)$, $C(2; 1; 6)$, $D(4; -2; -1)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (7; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 5; 4)$, $\vec{c} = (-3; 1; 2)$, $\vec{d} = (4; 2; 5)$ и выразить небазисные векторы через базисные.

Глава 4

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

***Учебная задача*:** основные определения линий на плоскости и поверхностей в пространстве; изучение методов решения задач аналитической геометрии; развитие представления о геометрических объектах.

***Литература*:** [1], [5], [9], [10], [12], [13], [16].

4.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Если обозначить через X и Y проекции направленного отрезка M_1M_2 (вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) на оси Ox и Oy прямоугольной декартовой системы координат Oxy, где $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то (рис. 4.1) имеет место

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1. \tag{4.1}$$

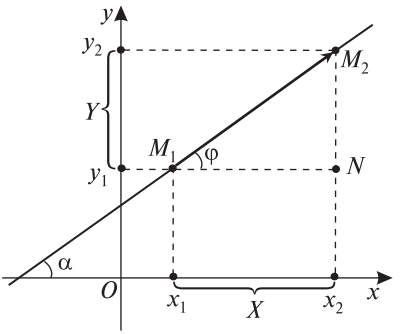


Рис. 4.1

По определению расстояние d между любыми двумя точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ равно длине отрезка M_1M_2, которая равна в свою очередь длине $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. Из прямоугольного треугольника M_1M_2N, изображенного на рис. 4.1, находим

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4.2)$$

Связь между проекциями X, Y отрезка M_1M_2 (вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) на координатные оси Ox, Oy и его длиной определяют формулой

$$X = x_2 - x_1 = d\cos\varphi,\ Y = y_2 - y_1 = d\sin\varphi. \qquad (4.3)$$

Угол между вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$ и осью Ox определяется соотношениями

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.4)$$

4.1.1. Площадь треугольника

Для любых трех точек $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, не лежащих на одной прямой, площадь S_{ABC} треугольника ABC определяется формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|. \qquad (4.7)$$

Пример 4.1. Найти проекции X и Y отрезка на координатные оси, если задан угол, образованный осью Ox и прямой, на которой расположен этот отрезок, $\varphi = 60°$, а длина отрезка $d = 2\sqrt{3}$.

Решение. По формулам (4.3) находим проекции

$$X = 2\sqrt{3}\cdot\cos 60° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3},$$

$$Y = 2\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: $X = \sqrt{3}$, $Y = 3$.

Пример 4.2. Найти угол φ, образованный осью Ox и прямой, заданной двумя точками $M_1(7; 2\sqrt{3})$ и $M_2(8; 3\sqrt{3})$.

Решение. Искомый угол φ образован вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$ и осью *Ox*. По формуле (4.4) вычисляем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{8 - 7} = \sqrt{3}.$$

Тогда угол $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°$.

Ответ: $\varphi = 60°$.

Пример 4.3. Площадь треугольника равна 4 кв. ед., двумя его вершинами являются точки *A*(3; 1) и *B*(1; –3). Определить координаты его третьей вершины *C*, если она расположена на оси *Oy*.

Решение. Используя формулу (4.7), находим площадь треугольника *ABC*:

$$\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1-3 & -3-1 \\ 0-3 & y_C - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & y_C - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-2(y_C - 1) - 12\right| = \frac{1}{2} - 2y_C - 10 = \frac{1}{2}2y_C + 10 = 4,$$

$$\left|2y_C + 10\right| = 8,\ 2y_C + 10 = \pm 8,\ 2y_C = -10 \pm 8,\ 2y_C = \left[\begin{matrix} -2 \\ -18 \end{matrix}\right.,\ y_C = \left[\begin{matrix} -1 \\ -9 \end{matrix}\right..$$

Ответ: *C*(0; –1), *C*(0; –9).

Пример 4.4. Найти площадь треугольника *ABC*, если заданы его вершины *A*(1; 1), *B*(6; 4), *C*(8; 2).

Решение. Используя формулу (4.7), находим площадь треугольника *ABC*:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 6-1 & 4-1 \\ 8-1 & 2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|5 - 21| = |-8| = 8.$$

Ответ: $S_{ABC} = 8$.

4.2. Прямая линия на плоскости

Прямая линия на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат определяется линейными уравнениями. Не существует системы аксиом, с помощью которых можно определить прямую линию на плоскости. Однако можно указать несколько способов задания прямой: через заданную точку с заданным нормальным вектором; с заданным угловым коэффициентом; через две заданные точки и др.

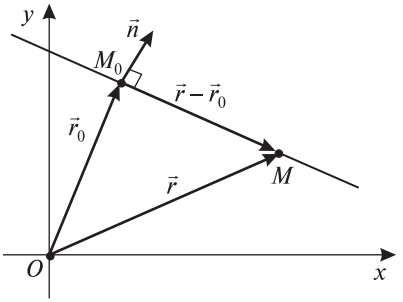


Рис. 4.2

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой или *нормалью*.

Пусть задан вектор $\vec{n}=(A;B)$ и точка $M_0(x_0;y_0)$, принадлежащая этой прямой. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка, принадлежащая прямой (рис. 4.2). Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$. В силу свойства 5) скалярного произведения векторов выполняется равенство $(\vec{n},\overrightarrow{M_0M})=0$.

Выражая далее $\overrightarrow{M_0M}$ в виде разности радиус-векторов $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, получим *векторное уравнение прямой*

$$(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0)=0. \tag{4.8}$$

Используя формулу (3.13) для вычисления скалярного произведения векторов, из (4.8) получим *уравнение прямой*, *проходящей через заданную точку с заданной нормалью*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{4.9}$$

Раскрыв в (4.9) скобки и положив $C=-Ax_0-By_0$, получим *общее уравнение прямой*:

$$Ax+By+C=0, \tag{4.10}$$

в котором коэффициенты при x и y являются координатами нормали.

Разрешая уравнение (4.10) относительно y, получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*:

$$y=kx+b, \tag{4.11}$$

где $k=-\dfrac{A}{B}$ – *угловой коэффициент* прямой, а $b=-\dfrac{C}{B}$ – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. *Углом наклона* прямой называется угол α, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой, т. е. $k=\operatorname{tg}\alpha$.

Пусть задано уравнение прямой с угловым коэффициентом (4.11) и точка $M_0(x_0;y_0)$, принадлежащая этой прямой. Тогда имеет место равенство

$$y_0=kx_0+b. \tag{4.12}$$

Вычтем из (4.11) уравнение (4.12), получим уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{4.13}$$

которое носит название *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом* или уравнение пучка прямых, если k не является фиксированным числом.

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Подставим их координаты в (4.13), получим

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{4.14}$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \tag{4.15}$$

Разделив почленно (4.14) на (4.15), получим

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \; - \tag{4.16}$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Из (4.16) следует

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; -$$

формула для вычисления углового коэффициента.

Если коэффициенты A, B и свободный член C в уравнении (4.10) не равны нулю, то перенося C в правую часть (4.10) с противоположным знаком и разделив обе части этого уравнения на $-C$, получим *уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{4.17}$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ – величины отрезков, отсекаемых соответственно на осях Ox и Oy.

4.2.1. Векторно-параметрическое уравнение прямой и его следствия

Параметрический и канонический способы задания прямой, а также ее задание по двум точкам получаются несложными преобразованиями векторно-параметрического уравнения прямой.

Направляющим вектором прямой называется любой вектор, параллельный этой прямой либо лежащий на ней. Пусть заданы точка $M_1(x_1; y_1)$ прямой и ее направляющий вектор $\vec{s} = (m; n)$. Точка плоскости $M(x; y)$ принадлежит прямой (рис. 4.3) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ и $\vec{s}$ – коллинеарные векторы, т. е. при выполнении равенства

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t\vec{s}, \tag{4.18}$$

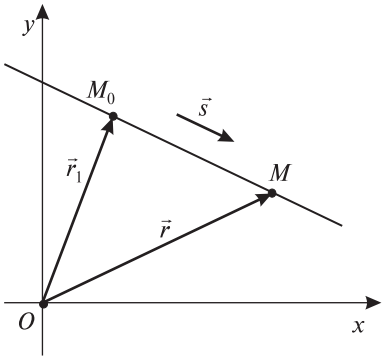


Рис. 4.3

где $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-векторы точек M_1 и M, t – параметр, принимающий любые числовые значения. Уравнение (4.18) называется *векторно-параметрическим уравнением* прямой.

Записав уравнение (4.18) в координатной форме и воспользовавшись определением равенства векторов, получим *параметрические уравнения* прямой, которые имеют вид

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn. \end{cases} \tag{4.19}$$

Если разрешить уравнения (4.19) относительно параметра t и приравнять полученные выражения, то получим *каноническое уравнение* прямой

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \tag{4.20}$$

В каноническом уравнении прямой пара чисел x_1 и y_1 определяет точку прямой, а m и n являются координатами ее направляющего вектора.

4.2.2. Нормальное уравнение прямой

Пусть задана прямая, не проходящая через начало координат, точка $P(x_1; y_1)$ – основание перпендикуляра OP, опущенного из начала координат O на прямую, и его длина p (рис. 4.4). Тогда, полагая $\vec{n} = \overrightarrow{OP}(x_1; y_1)$, уравнение (4.9) прямой по заданной нормали $\vec{n}$ и точке $M_1(x_1; y_1)$ запишется в виде равенства $x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$. Далее, выражая из треугольников OPQ и NOP через p координаты нормали $x_1 = p\cos\alpha$, $y_1 = p\sin\alpha$ и подставляя полученные выражения в приведенное выше равенство, получим уравнение

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha(y - p\sin\alpha) = 0,$$

которое после несложных преобразований примет вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{4.21}$$

Уравнение (4.21) называется *нормальным уравнением прямой*. Его можно использовать для нахождения расстояния d от произвольной точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{4.22}$$

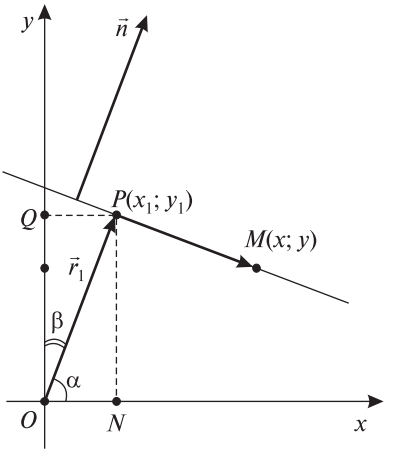


Рис. 4.4

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ вида (4.10), то для получения ее нормального уравнения достаточно умножить обе части (4.10) на *нормирующий множитель* $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, при этом знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку C, так как в (4.21) $p > 0$. Таким образом, в силу (4.22) расстояние d вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.23)$$

4.3. Взаимное расположение прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут пересекаться, т. е. иметь единственную общую точку, располагаться параллельно относительно друг друга либо совпадать (рис. 4.5–4.7). Для выявления взаимного расположения двух прямых на плоскости можно использовать любые способы их задания.

4.3.1. Задание прямых общими уравнениями

Пусть заданы две прямые их общими уравнениями (см. рис. 4.5–4.7)

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (4.24)$$

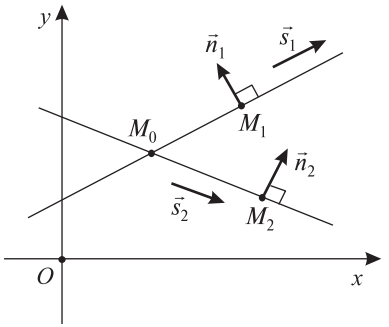


Рис. 4.5

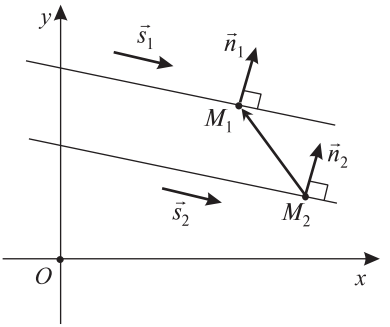


Рис. 4.6

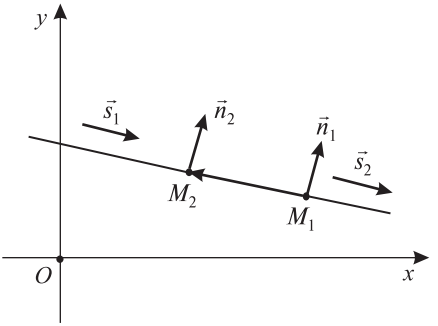


Рис. 4.7

Прямые пересекаются (см. рис. 4.5) тогда и только тогда, когда их нормали $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ не коллинеарны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{4.25}$$

В частности, прямые перпендикулярны, если скалярное произведение $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ равно нулю:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Прямые совпадают (см. рис. 4.7), если их нормали $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ коллинеарны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{4.26}$$

и уравнения задают одну и ту же прямую. Прямые параллельны (см. рис. 4.6), если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.27}$$

Соотношения (4.25)–(4.27) могут быть получены посредством анализа системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Пересечение в точке двух прямых, определяемых уравнениями системы (4.28), означает существование единственного ее решения, что равносильно

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0,$$

т. е. выполнению соотношений (4.25).

Параллельность двух рассматриваемых прямых равносильна несовместности системы (4.28), что имеет место при неравенстве рангов матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$$

и ее расширенной матрицы

$$(A|B) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}.$$

При выполнении (4.27) ранги A и $(A|B)$ равны соответственно единице и двум, что в силу теоремы Кронекера – Капелли означает несовместность системы (4.28).

Совпадение прямых, определяемых уравнениями (4.24), равносильно наличию бесконечного числа решений системы (4.28). Данная ситуация согласно теореме Кронекера – Капелли имеет место, когда ранги матриц A и $(A|B)$ равны единице, что гарантируют соотношения (4.26).

Угол θ между прямыми, заданными уравнениями (4.24), в случае их пересечения (рис. 4.8) определяется формулами

$$\cos\theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right).$$

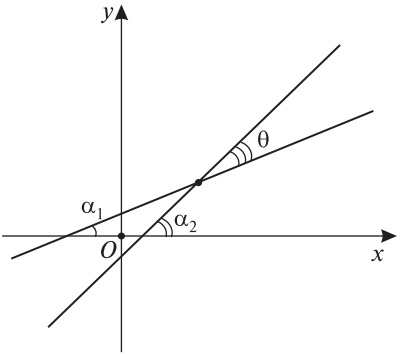


Рис. 4.8

Если три прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

и пересекаются в одной точке, то имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.29)$$

Обратно, если имеет место (4.29), то три данные прямые пересекаются в одной точке или параллельны, при этом допускается совпадение прямых.

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Тангенс угла $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ (см. рис. 4.8) между прямыми в данном случае вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (4.30)$$

Замечание. Так как в качестве угла между прямыми выбирают острый угол, то в формуле (4.30) правую часть берут по модулю, т. е.

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|.$$

Из (4.30) непосредственно следуют условия параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2$$

и перпендикулярности двух прямых

$$k_1k_2 = -1. \qquad (4.31)$$

Пример 4.5. Определить угол между прямыми $y=-3x+7$ и $y=2x+1$.

Решение. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами вида (4.11), следовательно, $k_1=-3$ и $k_2=2$. Так как угол φ между двумя прямыми по определению неотрицателен и не превосходит $\frac{\pi}{2}$, то, используя формулу (4.30) и вычисляя

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}=-1,$$

находим $\varphi=\operatorname{arctg}|-1|=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Пример 4.6. Определить взаимное расположение заданных прямых и в случае пересечения найти их общую точку:

а) $3x+4y-1=0,\ 2x+3y-1=0$;

б) $2x+3y+1=0,\ 4x+6y+3=0$;

в) $x+y+1=0,\ 3x+3y+3=0$.

Решение. а) Прямые заданы общими уравнениями $3x+4y-1=0$ и $2x+3y-1=0$. Следовательно, координаты их нормалей совпадают с коэффициентами при переменных x и y, т. е. нормалями являются векторы $\vec{n}_1=(3;4)$ и $\vec{n}_2=(2;3)$. Вычислив отношение их соответствующих координат, получим соотношение $\frac{3}{4}\neq\frac{4}{3}$, из которого в силу (4.25) следует, что прямые пересекаются. Координаты общей точки $M(x;y)$ заданных прямых должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases}3x+4y-1=0,\\2x+3y-1=0.\end{cases}$$

Решив систему, получим $x=-1$ и $y=1$. Тогда координаты точки $M(-1;1)$.

б) Прямые, заданные общими уравнениями $2x+3y+1=0$ и $4x+6y+3=0$, параллельны в силу (4.27), так как отношения соответствующих координат их нормалей $\vec{n}_1=(2;3)$, $\vec{n}_2=(4;6)$ и свободных членов 1, 3 уравнений удовлетворяют соотношениям $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{1}{3}$. К аналогичному выводу можно прийти, исследовав систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x+3y+1=0,\\4x+6y+3=0\end{cases}$$

на совместность. Исключение переменной x из второго уравнения посредством умножения первого уравнения на –2 и прибавлением ко второму приводит к противоречивому равенству $1 = 0$, следовательно, система несовместна, т. е. прямые параллельны.

в) Прямые, заданные уравнениями $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$, совпадают в силу (4.26), так как для отношений соответствующих координат нормалей $\vec{n}_1 = (1; 1)$, $\vec{n}_2 = (3; 3)$ и свободных членов 1, 3 уравнений имеют место равенства $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. К аналогичному выводу можно прийти, убедившись в том, что второе уравнение равносильно первому. Действительно, умножив обе части уравнения $3x + 3y + 3 = 0$ на $\frac{1}{3}$, получим равносильное уравнение, совпадающее с первым.

Ответ: а) прямые пересекаются в точке $M(-1; 1)$; б) прямые параллельны; в) прямые совпадают.

Пример 4.7. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнения высоты и медианы, которые проведены из вершины C.

Решение. Находим уравнение прямой, которой принадлежит сторона AB, по двум ее точкам $A(0; 1)$ и $B(6; 5)$. Согласно (4.16) это уравнение имеет вид $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$, т. е. $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$. Разрешая полученное уравнение относительно y, получим уравнение прямой в виде $y = \frac{2}{3}x + 1$, из которого находим ее угловой коэффициент $k_1 = \frac{2}{3}$. Так как высота, опущенная из вершины C на сторону AB, перпендикулярна AB, то угловой коэффициент прямой, которой принадлежит высота, согласно (4.30), равен $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}$. Далее, используя (4.13), находим уравнение $y - 12 = -\frac{3}{2}(x + 1)$ этой прямой по угловому коэффициенту $k_2 = -\frac{2}{3}$ и точке $C(12; -1)$. Затем преобразуем полученное уравнение к виду $y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$.

Точка $M(x_M; y_M)$ пересечения медианы, опущенной из вершины C на сторону AB, делит последнюю пополам. Используя формулы (3.8) для нахождения середины отрезка, вычисляем координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+6}{2} = 3,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Далее, используя (4.16), находим по точкам $C(12; -1)$ и $M(3; 3)$ уравнение $\frac{x-3}{12-3}=\frac{y-3}{-1-3}$ прямой, которой принадлежит медиана *CM*. Затем преобразуем полученное уравнение к виду $y=-\frac{4}{9}x+\frac{39}{9}$.

Ответ: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{21}{2}$; $y=-\frac{4}{9}x+\frac{39}{9}$.

Пример 4.8. Найти проекцию точки *P*(4; 9) на прямую, проходящую через точки *A*(3; 1) и *B*(5; 2).

Решение. Проекция точки *P* является точкой пересечения прямой, которой принадлежат точки *A* и *B*, и перпендикулярной ей прямой, проходящей через точку *P*. Находим уравнение первой прямой по двум ее точкам *A*(3; 1) и *B*(5; 2). Согласно (4.16) искомое уравнение имеет вид $\frac{x-3}{5-2}=\frac{y-1}{2-1}$, т. е. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}$. Далее преобразуем полученное уравнение к виду $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, из которого находим угловой коэффициент $k_1=\frac{1}{2}$. Следовательно, угловой коэффициент перпендикулярной прямой, согласно (4.31), $k_2=-\frac{1}{k_1}=-2$. Далее находим уравнение искомой прямой с угловым коэффициентом $k_2=-2$, проходящей через точку *P*(4; 9). Согласно (4.13) уравнение имеет вид $y-9=-2(x-4)$, т. е. $y=-2x+17$.

Искомая проекция точки *P*(4; 9) является точкой пересечения прямых, заданных уравнениями $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ и $y=-2x+17$. Далее, решив систему полученных уравнений, находим координаты $x=7$, $y=3$ искомой проекции.

Ответ: (7; 3).

Пример 4.9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -3)$ и начало координат.

Решение. В качестве направляющего вектора $\vec{s}$ искомой прямой можно использовать вектор $\overrightarrow{OA}=(-2; -3)$, где точка $O(0; 0)$ – начало координат. Следовательно, согласно (4.20) каноническое уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}$. После преобразований находим общее уравнение искомой прямой: $3x-2y=0$.

Ответ: $3x-2y=0$.

Пример 4.10. Прямая отсекает на координатных осях равные отрезки, величины которых положительны. Найти уравнение этой прямой, если площадь треугольника, образованного ею и отрезками, равна 8 см^2.

Решение. Пусть a – величина отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда, согласно (4.17) и условию задачи уравнение этой прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$, где $a>0$. Указанный в условии треугольник прямоугольный с катетами, равными a. Следовательно, его площадь равна $\frac{a^2}{2}=8$, откуда находим $a=40$. Таким образом, уравнение в отрезках данной прямой имеет вид $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$. После преобразований получим общее уравнение искомой прямой $x+y-4=0$.

Ответ: $x+y-4=0$.

Пример 4.11. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми $4x-3y-8=0$ и $4x-3y+7=0$.

Решение. Для решения задачи достаточно найти расстояние от некоторой точки одной из прямых до другой прямой. Найдем точку на прямой, заданной уравнением $4x-3y-8=0$. Для этого, полагая $y_0=0$ и подставляя данное значение в уравнение, находим $x_0=2$. Далее находим расстояние d от точки с координатами $x_0=2$ и $y_0=0$ до второй прямой $4x-3y+7=0$, которое, согласно формуле (4.23),

$$d=\frac{|4x_0-3y_0+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 0+7|}{\sqrt{16+9}}=\frac{15}{5}=3.$$

Ответ: $d=3$.

Пример 4.12. Определить линейную функциональную зависимость между полными издержками, затрачиваемыми на производство однородной химической продукции, и его объемом, если известны:

1) постоянные издержки, выраженные в млн руб. (затраты на содержание административного аппарата, амортизацию оборудования, отопление и освещение зданий и т. д.), не зависящие от объемов производства;

2) норма расхода переменных издержек, затрачиваемых на производство единицы объема продукции, выраженная в млн руб./ед. об. прод. (к переменным издержкам, зависящим от объема производства, относятся затраты на ресурсы, необходимые для производства продукции, например затраты на приобретение химических субстанций, расходы на оплату труда и т. д.).

Записать эту зависимость в явном виде, если величина постоянных издержек равна 4 млн руб., а норма расхода переменных издержек составляет 0,5 млн руб.

Решение. Пусть y – полные издержки производства, x – объем производства продукции, k – норма расхода переменных издержек, b – величина постоянных издержек. Тогда произведение kx равно величине переменных

издержек при объеме производства x. Сумма $kx + b$ определяет величину полных издержек y при объеме производства x. Таким образом, линейная зависимость между полными издержками y и объемом произведенной продукции x выражается уравнением $y = kx + b$. Подставляя в полученное уравнение $b = 4$ и $k = 0{,}5$, получим линейную функцию $y = 0{,}5x + 4$, выражающую в млн руб. величину полных издержек при заданных объеме производства, величине постоянных и норме расходов переменных издержек.

Ответ: $y = 0{,}5x + 4$.

Пример 4.13. Полные издержки каждого из двух предприятий, производящих одинаковую химическую продукцию, выражаются соответственно формулами $y = 0{,}7x + 2$, $y = 0{,}5x + 4$, где x – объем производства. Требуется выяснить, начиная с какого объема продукции, прибыль каждого из предприятий больше, чем прибыль другого предприятия. Постоянные и переменные издержки выражаются в млн руб.

Решение. Прибыль предприятия тем больше, чем меньше полные издержки. Следовательно, для ответа на поставленный в условии задачи вопрос достаточно указать те значения x, при которых полные издержки каждого из предприятий будут меньше издержек другого предприятия. Для этого построим прямые ℓ_1, ℓ_2, заданные соответственно уравнениями $y = 0{,}7x + 2$, $y = 0{,}5x + 4$, и найдем их точку пересечения.

Полагая $x = 0$, находим две различные точки $M_1(0; 2)$ и $M_2(0; 4)$, принадлежащие соответственно прямым ℓ_1 и ℓ_2. Далее, полагая $x = 10$, находим единственную точку $M(10; 9)$, которая принадлежит обеим прямым. Соединяя точки M_1 и M_2 с точкой M, получим прямые ℓ_1 и ℓ_2 (рис. 4.9).

При $0 \le x < 10$ отрезок M_1M прямой ℓ_1 расположен ниже отрезка M_2M прямой ℓ_2 (см. рис. 4.9), следовательно, полные издержки первого предприятия меньше полных издержек второго. Таким образом, при $0 \le x < 10$ прибыль первого предприятия больше, чем прибыль второго.

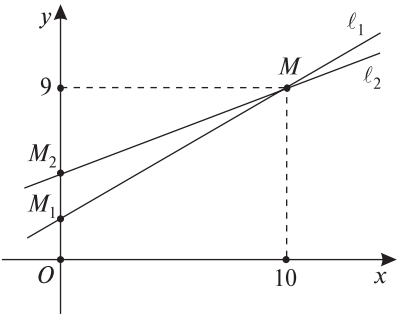


Рис. 4.9

Часть прямой ℓ_1 при $x > 10$ расположена выше соответствующей части прямой ℓ_2, следовательно, прибыль второго предприятия больше прибыли первого при указанных значениях x. При $x = 10$ полные издержки обоих предприятий равны 9 млн руб., и, следовательно, они имеют равную прибыль.

К аналогичным выводам можно прийти, решая неравенства $0{,}7x + 2 < 0{,}5x + 4$ и $0{,}7x + 2 < 0{,}5x + 4$ и находя решение уравнения $0{,}7x + 2 = 0{,}5x + 4$. Действительно, первое неравенство выполняется при $0 \le x < 10$, т. е. при указанных значениях x полные издержки первого предприятия меньше полных издержек второго. Второе неравенство справедливо при $x > 10$, т. е. при указанных значениях x полные издержки первого предприятия больше полных издержек второго. Наконец, решение $x = 10$ уравнения определяет объем производства, при котором полные издержки производства первого и второго предприятия равны.

Ответ: полные издержки первого предприятия больше полных издержек второго при $x > 10$.

Пример 4.14. Через пункты $A(6; 2)$ и $B(10; 5)$ (координаты пунктов измеряются в километрах) прямолинейно проходит кабель оптоволоконной связи. Необходимо подключить к этому кабелю пункт $C(4; -7)$ так, чтобы расстояние от него до кабеля было кратчайшим. Найти координаты точки подключения и длину кабеля, необходимого для подключения.

Решение. Кратчайшим расстоянием от пункта $C(4; -7)$ до кабеля – прямой, проходящей через точки A и B, является длина перпендикуляра CH, опущенного на эту прямую из точки C. Следовательно, нужно найти точку H, являющуюся точкой пересечения прямой, проходящей через точки A, B, и перпендикуляра к ней, проходящего через точку C, а затем найти длину отрезка CH.

Используя (4.20), находим уравнение прямой по двум точкам $A(6; 2)$ и $B(10; 5)$, которое имеет вид $\frac{x-6}{10-6} = \frac{y-2}{5-2}$, т. е. $\frac{x-6}{4} = \frac{y-2}{3}$. После преобразований получим уравнение прямой $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ вида (4.20), из которого получаем угловой коэффициент $k_1 = \frac{3}{4}$. Затем, используя (4.31) и (4.15), находим угловой коэффициент $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{4}{3}$ и записываем уравнение $y + 7 = -\frac{4}{3}(x - 4)$ прямой, проходящей через точку $C(4; -7)$ перпендикулярно

к первой прямой, заданной уравнением $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$. Решая систему линейных уравнений $\begin{cases}3x-4y=-10,\\4x+3y=-5,\end{cases}$ находим координаты $x=-2,\ y=1$ точки *H*.

Длина отрезка *CH* равна расстоянию от точки *C* до прямой, проходящей через точки *A* и *B*. Следовательно, *d* можно вычислить, используя (4.23):

$$d=\frac{|3\cdot 4-4\cdot(-7)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=10.$$

Таким образом, точка подключения к оптоволоконному кабелю имеет координаты $x=-2,\ y=1,$ а длина кабеля, требующегося для ее подключения, равна 10 км.

Ответ: *H* (–2; 1), *d* = 10 км.

4.3.2. Приложения определителей к задачам геометрии

1. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2),\ C(x_3;y_3)$ вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

2. Условие, при котором три точки $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2),\ C(x_3;y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2),$ имеет вид

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

4. Условие, при котором три прямые

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \end{cases}$$

пересекаются в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4.4. Квадратичные формы

4.4.1. Способы записи квадратичных форм

Определение. *Квадратичной формой* n-числовых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется числовая функция вида

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots +$$

$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

где a_{ij} – коэффициенты квадратичной формы.

Определение. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*.

Заметим, что A – симметричная матрица, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$. Если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают вещественные значения и коэффициенты a_{ii} вещественные, то квадратичная форма называется вещественной.

Квадратичная форма называется *невырожденной*, если ее матрица невырожденная.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Представим квадратичную форму в матричном виде. Введем матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n).$$

Тогда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX.$$

Пример 4.15. Представить в матричном виде квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_3^2 + 20x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Решение.

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ -2 & 5 & -4 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма называется *канонической* или приведенной к каноническому виду, если

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.$$

Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Пример. 4.16.

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Выделим полный квадрат при x_1 (коэффициент при квадрате (x_1^2) не равен нулю):

$$L = (x_1^2 - 2x_1(3x_2 - 6x_3) + (3x_2 - 6x_3)^2) - (3x_2 - 6x_3)^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 - 3x_2 + 6x_3)^2 - 9x_2^2 + 36x_2x_3 - 36x_3^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 - 3x_2 + 6x_3)^2 - 9x_2^2 + 34x_2x_3 - 35x_3^2.$$

Так как коэффициент при x_2^2 не равен нулю, то можем выделить полный квадрат при переменной x_2:

$$(x_1-3x_2+6x_3)^2-9\left(x_2^2-\frac{34}{9}x_2x_3+\frac{35}{9}x_3^2\right)=$$

$$=(x_1-3x_2+6x_3)^2-9\left(x_2^2-\frac{2\cdot 17}{9}x_2x_3+\frac{17^2}{9^2}x_3^2\right)-\frac{26}{9}x_3^2=$$

$$=(x_1-3x_2+6x_3)^2-9\left(x_2-\frac{17}{9}x_3\right)^2-\frac{26}{9}x_3^2.$$

Из решения примера следует, что невырожденное линейное преобразование будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1=x_1-3x_2+6x_3, \\ y_2=x_2-\dfrac{17}{9}x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$$

Полученное невырожденное линейное преобразование приводит квадратичную форму к виду

$$L(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-9y_2^2-\frac{26}{9}y_3^2.$$

Ответ: $L(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-9y_2^2-\dfrac{26}{9}y_3^2.$

Следует отметить, что одну и ту же квадратичную форму можно различными способами привести к каноническому виду.

Рассмотрим некоторые из них.

4.4.3. Метод Якоби

Если все главные миноры матрицы не равны нулю, то тогда квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом Якоби. Пусть

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j^2,$$

где

$$\lambda_1=\Delta_1;\ \lambda_j=\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},\ j=2,\ldots,n;$$

Δ_j – это главный минор j-го порядка.

Согласно методу Якоби существует преобразование переменных вида

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n, \\ x_2 = y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{n2}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

которое приводит данную квадратичную форму к каноническому виду.

Коэффициенты преобразования определяются по формуле

$$a_{ji} = (-1)^{j-1}\frac{\Delta_{j-1i}}{\Delta_{j-1}},$$

где Δ_{j-1i} – минор, расположенный на пересечении строк матрицы с номерами 1, 2, ..., $j-1$ и столбцов с номерами 1, 2, ..., $j-1$, $i+1$, ..., j.

Пример 4.17.

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Требуется привести квадратичную форму к каноническому виду.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1}\rfloor & -1 & 2 \\ -1 & \underline{2}\rfloor & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры:

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = 1,\ \Delta_3 = 6 + 4 + 4 - 8 - 3 - 4 = -1.$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Delta_1 = 1, \\ \lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1, \\ \lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2} = -1, \end{cases}$$

тогда

$$L(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

В данном случае преобразование переменных имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3, \\ x_2 = y_2 + a_{32}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

$$a_{21} = (-1)^3 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{-1}{1} = 1,$$

$$a_{31} = (-1)^4 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$a_{32} = (-1)^5 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0,$$

следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Ответ: $L(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

4.4.4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Приведение квадратичных форм к каноническому виду необходимо при упрощении уравнений линий и поверхностей второго порядка.

Пусть V – n-мерное векторное пространство, в котором задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и $\vec{x}(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$.

Пусть дана квадратичная форма вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{il} x_i x_j,$$

где a_{il} – действительные числа, $a_{ij} = a_{ji}$, A – симметричная матрица квадратичной формы в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Запишем квадратичную форму в матричном виде $F = X^T AX$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Для всякой квадратичной формы рассматриваемого вида существует такой базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$, в котором она имеет канонический вид

$$F = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \dots + k_n y_n^2,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – координаты вектора **x** в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$.

В частном случае если $k_i = 1, -1, 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то получается нормальный вид квадратичной формы.

Канонический вид квадратичной формы и соответствующее ортогональное преобразование могут быть найдены следующим образом:

1. Записывается симметричная матрица A данной квадратичной формы F.

2. Находятся собственные числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ этой матрицы, которые равны корням характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. В данном случае имеется n действительных корней.

3. Записывается канонический вид квадратичной формы.

4. Находятся собственные значения матрицы A, соответствующие собственным числам $k_1, k_2, \dots, k_n$, и строится ортонормированный базис из собственных векторов. Для этого делится каждая координата собственного вектора на его длину. Следует заметить, что в случае совпадения некоторых собственных чисел предварительно выбираются соответствующие им ортогональные собственные векторы.

5. Составляется матрица B путем записывания координаты базисного собственного вектора $\vec{e}_i'$ в i-й столбец этой матрицы.

6. Определяется ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду соотношением $X = BY$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что квадратичная форма приводится к каноническому виду, если существует базис линейного пространства, в котором матрица квадратичной формы является диагональной.

Пример 4.18. Привести квадратичную форму $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_2$ к каноническому виду и найти соответствующее ортогональное преобразование.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-k & 4 \\ 4 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)^2 - 16 = 0,\ 1-k = \pm 4,\ k_1 = -3,\ k_2 = 5.$$

В новых координатах y_1, y_2 данная квадратичная форма имеет следующий канонический вид: $F = -3y_1^2 + 5y_2^2$.

Для определения собственных векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, соответствующих собственным значениям $k_1 = -3$ и $k_2 = 5$, составляются системы уравнений:

$$\begin{cases} 4t_1 + 4t_1 = 0, \\ 4t_1 + 4t_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} -4t_1 + 4t_1 = 0, \\ 4t_1 - 4t_1 = 0. \end{cases}$$

Из решений систем следует:

$$\vec{x}_1 = (a, -a),\ \vec{x}_2 = (b, b),$$

$$|\vec{x}_1| = \sqrt{2}|a|,\ |\vec{x}_2| = \sqrt{2}|b|.$$

Нормируя векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, получим ортонормированный базис из собственных векторов

$$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Формулы соответствующего ортогонального преобразования записываются в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $F=-3y_1^2+5y_2^2$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Существует важное общее свойство квадратичных форм.

Закон инерции квадратичных форм. Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к каноническому виду.

4.4.5. Знакоопределенность квадратичных форм

Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной, если при любых значениях переменных, среди которых существует хотя бы одно, не равное нулю, выполняется условие

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \ \left(L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0\right).$$

Пример 4.19. $L_1 = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2$ – положительно определенная форма. $L_2 = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ – отрицательно определенная форма.

Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ее матрицы были положительны (отрицательны).

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, т. е.

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ ...,\ \Delta_n > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки всех главных миноров ее матрицы чередовались, т. е. выполнялось условие

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ ...,\ (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Более подробно рассмотрим на примере.

Пример 4.20. При каких значениях a_{22}, a_{33} квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 10x_2x_3$$

будет знакоположительной?

Решение. Составим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & a_{22} & 5 \\ 4 & 5 & a_{33} \end{pmatrix},\ \Delta_1 = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & a_{22} \end{vmatrix} = 2a_{22} - 9 > 0 \Rightarrow a_{22} > \frac{9}{2},$$

$$\Delta_3 = 2a_{22}a_{33} - 60 - 60 - 16a_{22} - 9a_{33} - 50 = 2a_{22}a_{33} - 9a_{33} - 16a_{22} - 170 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{22} > \dfrac{9}{2}, \\ 2a_{22}a_{33} - 9a_{33} - 16a_{22} - 170 > 0 \end{cases} \Rightarrow a_{33} > \frac{16a_{22} + 170}{2a_{22} - 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{33} > \frac{8(2a_{22} - 9)}{2a_{22} - 9} + \frac{242}{2a_{22} - 9}.$$

Ответ: $\begin{cases} a_{22} > \dfrac{9}{2}, \\ a_{33} > \dfrac{121}{a_{22} - \dfrac{9}{2}} + 8 \end{cases}$ – условие положительной определенности квадратичной формы.

4.5. Алгебраические кривые второго порядка на плоскости

При выборе на плоскости прямоугольной декартовой системы координат Oxy линия L определяется уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{4.32}$$

Здесь $F(x, y)$ – алгебраическое выражение с переменными x, y. При этом точка $M(x, y)$ принадлежит линии L тогда и только тогда, когда ее координаты x и y удовлетворяют уравнению (4.32).

Определение. Линия L называется *алгебраической кривой второго порядка*, если ее уравнение в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4.33}$$

где не все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю.

Если все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю, а хотя бы одно из чисел D или E не равно нулю, то L – прямая, т. е. является линией первого порядка.

Не каждое уравнение вида (4.33) определяет кривую второго порядка, имеются вырожденные случаи, например:

1) $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ определяет пустое множество точек при $A \geq 0$, $C \geq 0$, $F > 0$;

2) $Ax^2 + Cy^2 = 0$ определяет одну точку, начало координат, при $A \geq 0$, $C \geq 0$;

3) $Ax^2 - Cy^2 = 0$ определяет две прямые $y = \pm\sqrt{A/C}x$ при $A > 0$, $C > 0$;

4) $Ax^2 + F = 0$ и $Cy^2 + F = 0$ определяют две пары прямых $x = \pm\sqrt{-F/A}$ и $y = \pm\sqrt{-F/C}$ при $A > 0$, $C > 0$, $F < 0$;

5) $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ определяет пустое множество точек при $D^2 - AF < 0$, одну прямую $x = -D/A$ при $D^2 - AF = 0$ и две прямые $x = \left(-D \pm \sqrt{D^2 - AF}\right)/A$ при $D^2 - AF > 0$;

6) $Cy^2 + 2Ey + F = 0$ определяет пустое множество точек при $E^2 - CF < 0$, одну прямую $y = -E/C$ при $E^2 - CF = 0$ и две прямые $y = \left(-E \pm \sqrt{E^2 - CF}\right)/C$ при $E^2 - CF > 0$.

Кривыми второго порядка являются *эллипс (окружность)*, *гипербола* и *парабола*. Ниже приводятся их канонические уравнения в специально выбранной декартовой системе координат и рассматриваются основные геометрические свойства указанных кривых.

4.5.1. Эллипс

Геометрическое место точек называется эллипсом, если сумма расстояний от каждой из них до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть постоянная величина, большая чем расстояние между фокусами.

Пусть M – произвольная точка эллипса, F_1, F_2 – фокусы, F_1M, F_2M – отрезки, определяющие расстояния от точки M до фокусов F_1, F_2, $2a$ – постоянная величина, не равная нулю. Тогда эллипс определяется соотношением

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Определим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, что возможно, так как по определению $2a > 2c$, и введем в рассмотрение прямоугольную декартову систему координат Oxy, ось Ox которой проходит через фокусы F_1 и F_2, а ось Oy – через середину отрезка F_1F_2. Координаты фокусов F_1 и F_2 в выбранной системе Oxy определяются соответственно парами чисел $-c$, 0 и c, 0, а расстояния от фокусов

$$F_1(-c;\, 0),\ F_2(c;\, 0) \tag{4.34}$$

до точки $M(x, y)$ эллипса (рис. 4.10) определяются равенствами

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

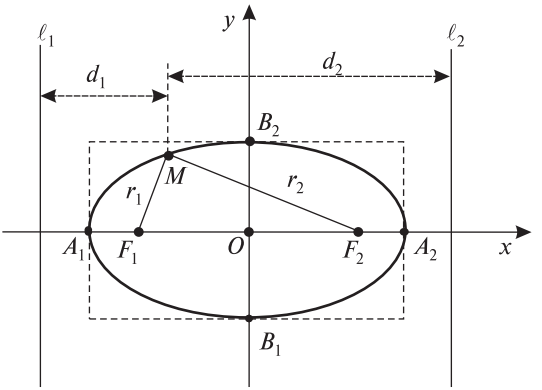


Рис. 4.10

Следовательно, в координатной форме уравнение эллипса имеет вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Преобразуем последнее уравнение, перенося слагаемое $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ с противоположным знаком в его правую часть и возводя затем обе его части в квадрат. Далее, вычислив $(x+c)^2$, $(x-c)^2$ и приведя подобные члены, разрешаем полученное уравнение относительно $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. В результате получим уравнение $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, полагая в нем $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и приведя подобные члены, получим уравнение $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделив обе части полученного уравнения на a^2b^2, придем к *каноническому уравнению* эллипса следующего вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4.35)$$

Выбрав декартову систему координат так, чтобы ось Oy проходила через фокусы F_1 и F_2, а ось Ox – через средину отрезка F_1F_2, и положив сумму расстояний от произвольной точки $M(x, y)$ эллипса до его фокусов $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ равной $2b$ (рис. 4.11), получим уравнение эллипса вида

$$2b=\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2},$$

где $MF_1=\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $MF_2=\sqrt{x^2+(y-c)^2}$. Определив далее $a=\sqrt{b^2-c^2}$ и проведя аналогичные указанным выше преобразования приведенного уравнения, получим каноническое уравнение вида (4.35), в котором $b>a$.

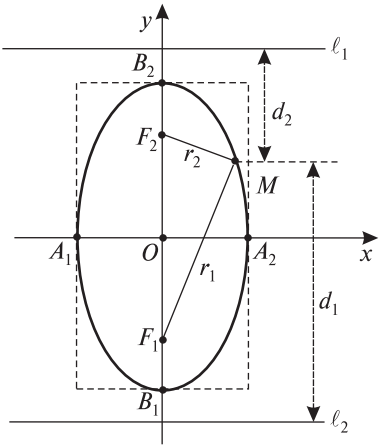


Рис. 4.11

Таким образом, независимо от расположения фокусов эллипса на координатных осях его каноническое уравнение имеет вид (4.35), при этом фокусы расположены на оси Ox, если $a > b$, и на оси Oy, если $b > a$. В обоих случаях эллипс располагается симметрично относительно осей Ox и Oy, которые называются его *осями симметрии*, а начало координат является его центром симметрии, который называется *центром* эллипса (см. рис. 4.10, 4.11). Пары точек

$$A_1(-a;\ 0),\ A_2(a;\ 0),\ B_1(0;\ -b),\ B_2(0;\ b) \tag{4.36}$$

пересечения эллипса соответственно с его осями симметрии называются его *вершинами*, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 длиной $2a$ и $2b$ – его *осями*, а OA_2 и OB_2 – *большой* и *малой полуосями* при $a > b$ и *малой* и *большой*, если $b > a$. Длины полуосей равны a и b, которые иногда отождествляют с его полуосями. Отрезок F_1F_2 длиной $2c$ называется *фокусным расстоянием*. Таким образом, эллипс вписан в прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ и центром O.

Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \left(\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right),\ \varepsilon < 1,$$

называется *эксцентриситетом* эллипса при $a > b$ ($b > a$). Если $M(x;\ y)$ – произвольная точка эллипса, то отрезки F_1M и F_2M длиной r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Длины фокальных радиусов вычисляются по формулам

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

При $a > b$ прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon},\ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами* эллипса (см. рис. 4.10). Если $b > a$, то директрисы ℓ_1, ℓ_2 определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon},\ y = \frac{b}{\varepsilon}$$

(см. рис. 4.11). Так как $\varepsilon < 1$, то из определения директрис следует, что они располагаются вне прямоугольника, в который вписан эллипс. Обозначим при $a > b$ через d_1 и d_2 расстояние от произвольной точки M эллипса до директрис, расположенных соответственно левее и правее ее вершин A_1 и A_2 (см. рис. 4.10). Если $b > a$, то d_1 и d_2 – расстояния от точки M до директрис, расположенных соответственно ниже и выше вершин B_1 и B_2 (см. рис. 4.11).

Директрисы обладают свойством, которое устанавливает следующее утверждение: *отношение фокальных радиусов r_1 и r_2 к соответствующим расстояниям d_1 и d_2 постоянно и равно эксцентриситету эллипса, т. е. имеет место равенство*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Площадь эллипса S определяется равенством $S = \pi ab$. *Касательной* к эллипсу является биссектриса угла между продолжением фокального радиуса F_2M и фокальным радиусом F_1M. Уравнение касательной к эллипсу, проведенной в точке $M(x_1; y_1)$, имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Эллипс с центром симметрии в точке $C(x_0; y_0)$ описывается уравнением

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4.37)$$

Параметрическое уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где a и b – его полуоси, $0 \le t \le 2\pi$.

При $a = b$ эллипс является окружностью радиусом $R = a$. Следовательно, полагая в уравнении (4.35) $a = b = R$, получим уравнение окружности, которое равносильно уравнению

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности расположен в точке $C(x_0; y_0)$, то из (4.37) получаем уравнение окружности следующего вида:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (4.38)$$

Пример 4.21. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение. Из (4.35) и заданного уравнения эллипса выписываем $a^2 = 25$, $b^2 = 16$. Следовательно, $5 = a > b = 4$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. Так как при $a > b$ фокусы эллипса расположены на оси Ox, то используя формулы (4.34) и (4.36), находим левый фокус $F_1(-c; 0) = F_1(-3; 0)$ данного эллипса и его нижнюю вершину $B_1(0; -b) = B_1(0; -4)$. Далее, используя (3.20), записываем уравнение $\frac{x+3}{0+3} = \frac{y-0}{-4-0}$ искомой прямой по двум ее точкам $F_1(-3; 0)$ и $B_1(0; -4)$, которое равносильно уравнению $4x + 3y + 12 = 0$.

Ответ: $4x + 3y + 12 = 0$.

Пример 4.22. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ определяет окружность, найти ее центр и радиус.

Решение. Выделяя в квадратных трехчленах $x^2 + 4x - 3$, $y^2 - 6y + 0$ их полные квадраты

$$x^2 + 4x - 3 = (x^2 + 4x + 4) - 3 - 4 = (x + 2)^2 - 7,$$

$$y^2 - 6y + 0 = (y^2 - 2 \cdot 3y + 9) - 9 = (y - 3)^2 - 9$$

и подставляя вместо них найденные выражения $(x + 2)^2 - 7$ и $(y - 3)^2 - 9$ в левую часть заданного уравнения, получим уравнение $(x + 2) + (y - 3)^2 = 16$, равносильное исходному. Сравнив его с уравнением (4.38), убеждаемся в том, что $(x + 2) + (y - 3)^2 = 16$ задает окружность радиусом 4 с центром в точке $C(-2; 3)$.

Ответ: $R = 4$, центр в точке $C(-2; 3)$.

Пример 4.23. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) малая полуось $b = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$;

б) сумма полуосей $a + b = 12$ и расстояние между фокусами $2c = 4\sqrt{6}$.

Решение. а) Так как b – малая полуось эллипса, то $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, и с учетом равенств $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0{,}6$ и $b = 8$ получаем уравнение $\dfrac{\sqrt{a^2 - 64}}{a} = 0{,}6$ для вычисления большой полуоси эллипса. Умножая обе части приведенного уравнения на a, возводя их в квадрат и разрешая полученное уравнение относительно a^2, получим $a^2 = 100$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

б) Так как неизвестно, какая из полуосей больше другой, возможны два случая: $a > b$ или $a < b$. В первом случае $c^2 = a^2 - b^2$ и с учетом равенств $a + b = 12$, $c = 2\sqrt{6}$ имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 12, \\ a^2 - b^2 = 24 \end{cases}$$

для нахождения полуосей эллипса. Выражая из первого уравнения $b = 12 - a$ и подставляя $12 - a$ вместо b во второе, получим после вычисления $(12 - a)^2$ и приведения подобных членов уравнение $24a = 168$, из которого находим $a = 7$. Подставляя найденное значение a в первое уравнение системы, получим $b = 5$. Таким образом, в первом случае каноническое уравнение эллипса с учетом (4.35) записывается в виде $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Во втором случае при $a < b$ равенства $c^2 = b^2 - a^2$, $a + b = 12$, $c = 2\sqrt{6}$ определяют систему линейных неравенств

$$\begin{cases} a + b = 12, \\ b^2 - a^2 = 24, \end{cases}$$

из которой по аналогии находим $b = 7$ и $a = 5$. Таким образом, во втором случае уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$.

Ответ: а) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$.

Пример 4.24. Два пункта производства, расстояние между которыми равно 200 км, изготавливают однородную химическую продукцию (минеральные удобрения), цена на которую одинаковая для всех потребителей этой

продукции. Транспортные расходы при перевозке единицы объема продукции от первого предприятия до пунктов потребления составляют 9 руб/км, а от второго – 3 руб/км. Величина этих расходов учитывается при реализации продукции в пунктах потребления. Считая, что пункты производства и потребления расположены на плоскости, указать геометрические места точек размещения пунктов потребления, в которых расходы потребителей при приобретении одинаковых объемов продукции у производителей будут: а) одинаковыми; б) разными. При этом следует указать, в каких случаях выгоднее покупать продукцию первого или второго производителя.

Решение. Будем считать, что пункты производства размещены в точках A и B. Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy, ось Ox которой проходит через точки A и B, а ось Oy – через середину отрезка AB. Координаты точек A и B в выбранной системе координат определяются следующим образом: $A(-100; 0)$, $B(100; 0)$, так как расстояние между A и B равно 200.

Пусть произвольный пункт потребления размещен в точке $P(x; y)$. Тогда общие затраты в нем на приобретение продукции объемом V и ее доставку от первого и второго производителя будут равны соответственно $pV + 9|\overrightarrow{AP}|$ и $pV + 3|\overrightarrow{BP}|$ (рис. 4.12), где p – цена единицы объема продукции. Если P – пункт потребления, в котором расходы потребителей при приобретении одинаковых объемов продукции у обоих производителей одинаковы, то должно выполняться следующее равенство: $pV + 9|\overrightarrow{AP}| = pV + 3|\overrightarrow{BP}|$. Вычисляя длины $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x+100)^2 + y^2}$, $\overrightarrow{BP} = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$ и подставляя найденные значения в указанное равенство, получим следующее уравнение: $pV + 9\sqrt{(x+100)^2 + y^2} = pV + 3\sqrt{(x-100)^2 + y^2}$, равносильное уравнению $3\sqrt{(x+100)^2 + y^2} = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$. Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, вычисляя $(x+100)^2$, $(x-100)^2$ и приводя в нем подобные члены, получим уравнение вида $x^2 + 250x + y^2 + 10\,000 = 0$. Выделяя далее в квадратном трехчлене $x^2 + 250x + 10\,000$ полный квадрат

$$x^2 + 250x + 10\,000 =$$
$$= (x^2 + 2\cdot 125x + 15\,625) - 15\,625 + 10\,000 = (x+125)^2 - 5625,$$

получим уравнение $(x+125)^2 + y^2 = 75^2$, определяющее, согласно (4.38), окружность с центром в точке $C(-125; 0)$ и радиусом $R = 75$. Таким образом, геометрическим местом точек для размещения пунктов потребления, в которых расходы потребителей при приобретении одинаковых объемов продукции у обоих производителей будут одинаковыми, является найденная окружность.

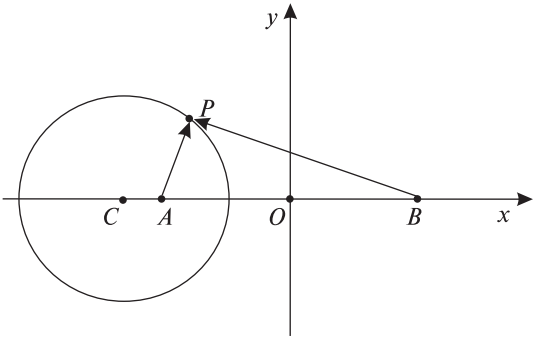


Рис. 4.12

Данная окружность разбивает плоскость на две области: внутренность соответствующего ей круга и внешность этого круга. Для внутренних точек круга выполняется неравенство $9\sqrt{(x+100)^2+y^2} < 3\sqrt{(x-100)^2+y^2}$, где левая и правая части неравенства определяют величину транспортных расходов по доставке продукции соответственно от первого и второго производителя. Следовательно, для пунктов размещения потребителей в этих точках выгоднее покупать продукцию первого производителя, расположенного в точке A.

Для точек, лежащих вне рассматриваемого круга, выполняется противоположное строгое неравенство $9\sqrt{(x+100)^2+y^2} > 3\sqrt{(x-100)^2+y^2}$, следовательно, для пунктов потребления, размещенных в таких точках, более выгодно покупать продукцию второго производителя, размещенного в точке B.

Ответ: а) окружность с центром в точке $C(-125; 0)$ и радиусом $R = 75$; б) $B(100; 0)$.

4.5.2. Гипербола

Определение. Геометрическое место точек на плоскости называется *гиперболой*, если абсолютная величина разности расстояний от каждой из них до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть постоянная величина, меньше чем расстояния между фокусами.

Пусть M – произвольная точка гиперболы, F_1, F_2 – ее фокусы, расстояние между которыми положим равным $2c$, F_1M, F_2M – длины отрезков, определяющих расстояние от точки M до фокусов, $2a$ – абсолютная величина разности расстояний $F_1M - F_2M$. Тогда гипербола полностью опре-

деляется соотношением $|F_1M–F_2M| = 2a$, которое равносильно, согласно определению абсолютной величины, двум равенствам

$$-F_1M + F_2M = 2a,\ F_1M - F_2M = 2a. \tag{4.39}$$

Определим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, что возможно, так как по определению $2a < 2c$, и введем в рассмотрение систему координат Oxy, ось Ox которой проходит через фокусы F_1 и F_2, а Oy – через середину отрезка F_1F_2. В выбранной системе координаты фокусов F_1, F_2 и длины отрезков F_1M, F_2M определяются формулами (4.34) и (4.35). Следовательно, уравнения (4.39), определяющие гиперболу, в координатной форме записываются следующим образом:

$$-\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{4.40}$$

Множество точек гиперболы, координаты которых удовлетворяют соотношению $-F_1M + F_2M = 2a$, т. е. первому уравнению (4.40), называются ее *левой ветвью*. Соответственно, *правую ветвь* гиперболы образуют точки, удовлетворяющие $F_1M - F_2M = 2a$, т. е. второму уравнению (4.40).

Преобразовав с использованием равенства $c^2 = a^2 + b^2$ оба уравнения (4.40) по аналогии с преобразованием уравнения эллипса, получим *каноническое уравнение* гиперболы следующего вида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.41}$$

Уравнение (4.41) содержит квадраты координат точек гиперболы, следовательно, она располагается симметрично относительно осей Ox и Oy. Так как Ox пересекает гиперболу в двух точках $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, а Oy не пересекает ее, то Ox называется *действительной*, а Oy – *мнимой осью* симметрии. Точки A_1, A_2 называются вершинами гиперболы, отрезок A_1A_2 длиной $2a$ – ее *действительной осью*. Точки $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$ определяют на оси Oy отрезок B_1B_2 длиной $2b$, который называется *мнимой осью* гиперболы. Отрезки OA_2 и OB_2, длиной a и b называются *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Прямые, на которых расположены диагонали прямоугольника, с серединами сторон в точках A_1, A_2, B_1, B_2 являются асимптотами гиперболы. Ветви гиперболы с ростом по абсолютной величине координат ее точек приближаются к асимптотам (рис. 4.13), которые определяются уравнениями вида

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x. \tag{4.42}$$

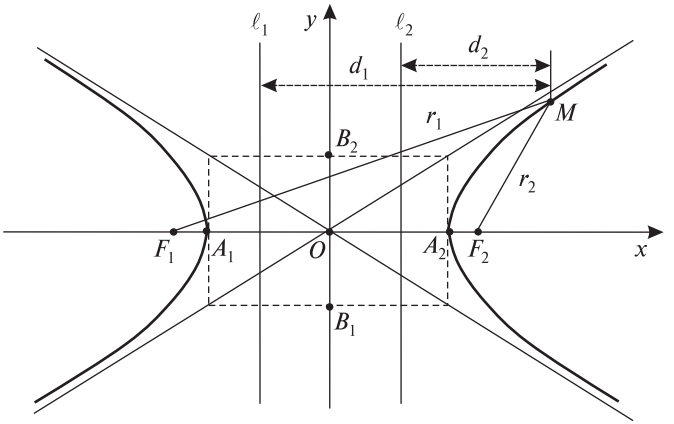


Рис. 4.13.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Так как $a = \sqrt{c^2-b^2} < c$, то $\varepsilon > 1$. Если $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M длиной r_1 и r_2 (см. рис. 4.13) называются *фокальными радиусами* точки M, которые часто отождествляются со своими длинами. Фокальные радиусы точек правой и левой ветвей гиперболы вычисляются соответственно по следующим формулам:

$$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = -a + \varepsilon x,$$
$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = -a - \varepsilon x. \qquad (4.43)$$

Прямые ℓ_1 и ℓ_2, определяемые уравнениями $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами* гиперболы (см. рис. 4.13).

Если выбрать систему координат так, чтобы ось Oy проходила через фокусы F_1 и F_2, а ось Ox – через средину отрезка F_1F_2, то расстояния от произвольной точки $M(x; y)$ гиперболы до ее фокусов $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, как и для эллипса, будут $F_1M = \sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $F_2M = \sqrt{x^2+(y-c)^2}$. Подставляя их в левую часть уравнений (4.40), а в правую часть – $2b$ вместо $2a$ и проведя аналогичные преобразования, получим уравнение *сопряженной* гиперболы

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.44)$$

которая изображена на рис. 4.14.

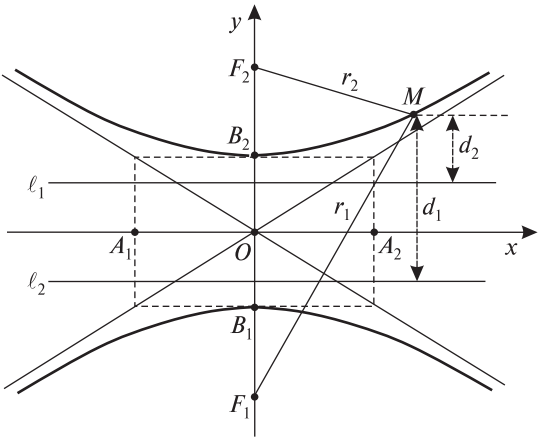


Рис. 4.14

Асимптотами сопряженной гиперболы являются продолжения диагоналей прямоугольника с серединами сторон в точках A_1, A_2 и B_1, B_2, а ее осями симметрии – координатные оси. При этом ось Oy пересекает гиперболу в двух точках $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$, которые называются ее вершинами. Вершины определяют отрезок B_1B_2, который называется ее *действительной осью*. Точки $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$ являются концами *мнимой оси* гиперболы. Отрезки OA_2 и OB_2 длиной a и b называются соответственно ее *мнимой* и *действительной полуосями*. Эксцентриситет сопряженной гиперболы определяется равенством $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, а директрисы – уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon},\ y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то в данном случае $\varepsilon > 1$. Следовательно, директрисы гипербол, определяемых уравнениями (4.41), (4.44), пересекают прямоугольник гиперболы и проходят между началом координат и ее вершинами.

Расстояния d_1 и d_2 от произвольной точки M гиперболы до директрис, ближайших соответственно к фокусам F_1 и F_2, и фокальные радиусы r_1 и r_2 удовлетворяют соотношению

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Касательной к гиперболе в ее точке M является *биссектриса* угла между фокальными радиусами, проведенными к M. Для любой точки M гипербо-

лы отрезок касательной между асимптотами делится пополам точкой касания. Уравнения касательной, проведенной в точке $M(x_1; y_1)$ к гиперболам, определяемым уравнениями (4.41) и (4.44), имеют следующий вид:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_2}{b^2} = 1, \; -\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1.$$

Гипербола с равными полуосями называется *равносторонней*. Уравнения равносторонней гиперболы и сопряженной с ней гиперболы имеют вид

$$x^2 - y^2 = a^2, \; -x^2 + y^2 = a^2. \qquad (4.45)$$

Эксцентриситет ε любой равносторонней гиперболы $\varepsilon = \sqrt{2}$, а ее асимптоты взаимно перпендикулярны и определяются уравнениями

$$y = x, \; y = -x.$$

Если выбрать новую систему координат $Ox'y'$, осями Ox' и Oy' которой являются асимптоты равносторонней гиперболы (продолжения диагоналей ее прямоугольника) (рис. 4.15), то ее уравнения (4.45) примут следующий вид:

$$x'y' = \frac{a^2}{2}.$$

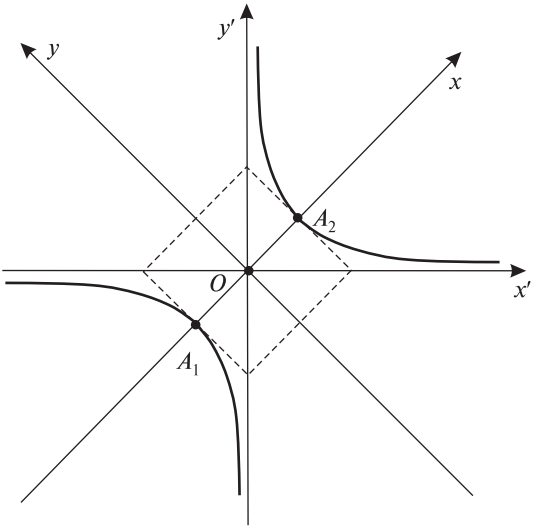


Рис. 4.15

Таким образом, в данном случае гипербола представляет собой график обратной пропорциональной зависимости между переменными y' и x':

$$y' = \frac{m}{x'},\ m = \frac{a^2}{2}.$$

Если центр симметрии гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b находится в точке $C(x_0; y_0)$, прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $y = y_0$, то уравнение гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4.46)$$

Если центр симметрии гиперболы с действительной полуосью b и мнимой полуосью a находится в точке $C(x_0; y_0)$, прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются осями симметрии гиперболы и ее фокусы лежат на прямой $x = x_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4.47)$$

Пример 4.25. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Решение. Найдем каноническое уравнение $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ гиперболы, разделив обе части заданного уравнения на 6, и определим $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$. Используя (4.41) и найденные значения a и b, записываем уравнения $y = \sqrt{\frac{2}{3}}x$ и $y = -\sqrt{\frac{2}{3}}x$ асимптот данной гиперболы.

Ответ: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

Пример 4.26. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Так как большая полуось длины $\sqrt{25} = 5$ заданного эллипса, которой принадлежат его фокусы и одновременно фокусы гиперболы, расположена на оси Ox, то уравнение искомой гиперболы имеет вид (4.40), т. е. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Используя уравнение эллипса, находим $c = \sqrt{25-9} = 4$ – расстояние от фокусов до начала координат. Действительной полуосью гиперболы является a. Следовательно, используя формулу для вычисления экс-

центриситета гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$, его значение $\varepsilon = 2$ и найденное значение c, определяем $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{2} = 2$. Далее, используя формулу $b^2 = c^2 - a^2$ для вычисления квадрата длины мнимой полуоси, вычисляем $b^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$. Таким образом, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Пример 4.27. На железной дороге, проходящей строго прямолинейно с запада на восток, расположены две станции *A* и *B*, станция *A* находится западнее *B*. От этих станций по железной дороге перевозятся грузы (химическое сырье) на конечную восточную станцию *C*. Из пунктов, расположенных на местности вблизи железной дороги, на автотранспорте к станциям *A* и *B* доставляются грузы для последующей отправки на конечную станцию *C*, которая не связана автодорогами с пунктами отправки грузов. Требуется определить точки размещения пунктов грузоотправителей, для которых при доставке грузов на конечную станцию *C*: а) суммарные транспортные расходы равны при использовании станций *A*, *B*; б) использование станции *A* более выгодно, чем *B*.

Решение. а) Обозначим на плане местности через F_1 и F_2 точки размещения станций *A* и *B*, через $M = M(x; y)$ – произвольный пункт грузоотправителя. Введем декартову прямоугольную систему координат *Oxy*: оси *Ox* принадлежат точки F_1 и F_2, ось *Oy* проходит через середину отрезка $[F_1; F_2]$ (рис. 4.16). Пусть стоимость за 1 км провоза груза равна *p* руб. при использовании автотранспорта и *q* руб. – при использовании железной дороги.

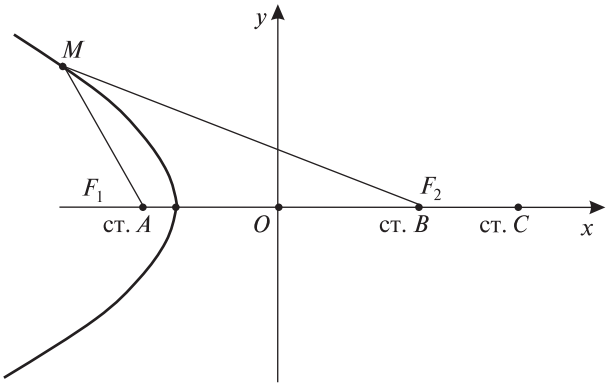


Рис. 4.16

Тогда $p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C|$ – суммарные транспортные расходы на перевозку груза из M в C при использовании станции A, а $p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_2C|$ – из M в C при использовании в качестве промежуточной станции B. Равенство

$$p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C|=p\cdot|F_2M|+q\cdot|F_2C|$$

означает, что суммарные транспортные расходы при использовании станций A и B равны. Вычитая из обеих частей приведенного равенства $q|F_2C|$, получим равносильное равенство $p\cdot F_1M+q\cdot F_1F_2=p\cdot F_2M$, которое в свою очередь равносильно равенству $-|F_1M|+|F_2C|=\frac{q}{p}\cdot|F_1F_2|$. Полагая в полученном равенстве $2a=\frac{q}{p}\cdot|F_1F_2|$, получим уравнение $-|F_1M|+|F_2C|=2a$ левой ветви гиперболы, фокус F_1 которой находится в точке расположения станции A на плане местности.

б) При перевозке грузов из M в C использование станции A более выгодно, чем B, если транспортные расходы удовлетворяют неравенству

$$p\cdot|F_1M|+q\cdot|F_1F_2|+q\cdot|F_2C|<p\cdot|F_2M|+q\cdot|F_2C|,$$

которое равносильно неравенству $-|F_1M|+|F_2C|>2a.$ Выбрав начало координат в точке O, получим, что $0=|F_1O|+|F_2O|<2a.$ Следовательно, указанное неравенство описывает ту часть плоскости, которой не принадлежит начало координат, т. е. выпуклую область, ограниченную ветвью гиперболы с фокусами F_1 и F_2.

Таким образом, использование станции A при доставке грузов из M в C более выгодно для грузоотправителей, пункты которых на плане местности расположены в точках, принадлежащих выпуклой области, ограниченной ветвью гиперболы с фокусами F_1 и F_2. Таким образом, установлено, что использование станции B при доставке грузов из M в C более выгодно для грузоотправителей, пункты которых на плане местности принадлежат дополнению выпуклой области.

Ответ. Таким образом, установлено, что а) суммарные транспортные расходы **равны** при использовании станций A и B, если пункты грузоотправителей на плане местности расположены в точках левой ветви гиперболы с фокусом F_1; б) использование станции A более выгодно при доставке грузов из M в C для грузоотправителей, пункты которых на плане местности расположены в точках, принадлежащих выпуклой области, ограниченной ветвью гиперболы с фокусами F_1 и F_2.

4.5.3. Парабола

Определение. Геометрическое место точек плоскости называется *параболой*, если каждая из них равноудалена от фиксированной точки, называемой *фокусом*, и от фиксированной прямой, называемой *директрисой* (при условии, что директриса не проходит через фокус).

Пусть M – произвольная точка плоскости, F – фокус параболы, M' – проекция точки M на директрису ℓ. Тогда отрезки FM и MM' определяют соответственно расстояния от точки M до фокуса и директрисы. Следовательно, парабола определяется соотношением

$$FM = MM'. \tag{4.48}$$

Обозначим через p расстояние от фокуса F до директрисы ℓ, которое называется *фокальным параметром* параболы, и введем декартову систему координат Oxy, ось Ox которой проходит через фокус перпендикулярно директрисе в направлении от нее к фокусу, а точка O (начало координат) равноудалена от фокуса и директрисы (рис. 4.17).

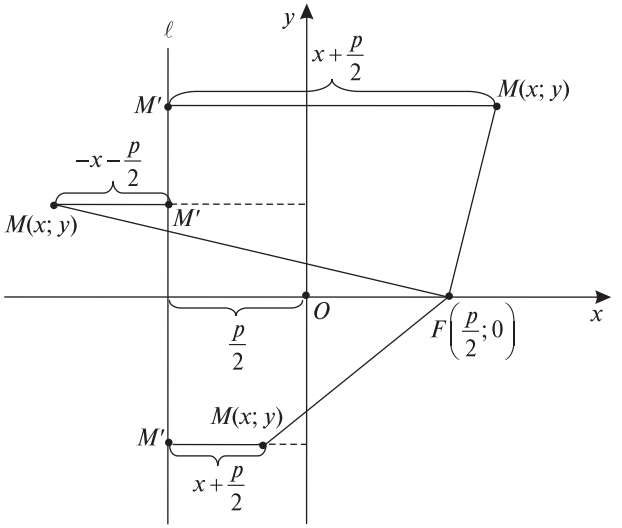


Рис. 4.17

В выбранной системе координат абсцисса и ордината фокуса F равны $\frac{p}{2}$ и 0. Следовательно, расстояние от любой точки $M(x; y)$ плоскости до $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Расстояния от любой точки $M(x; y)$ до директрисы равны $-x - \frac{p}{2}$ и $x + \frac{p}{2}$, если M расположена соответственно слева и справа от директрисы (см. рис. 4.17). Следовательно, равенство (4.48) в координатной форме записывается в виде

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Так как левая и правая части полученного уравнения для соответствующих точек неотрицательны, то оно равносильно уравнению вида

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Вычислив квадраты разности и суммы, приведя подобные члены и выразив y^2 через x, получим *каноническое уравнение* параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (4.49)$$

Из (4.49) следует, что во введенной системе координат абсциссы точек параболы неотрицательны, следовательно, она располагается (рис. 4.18) в правой координатной полуплоскости симметрично относительно оси Ox, которая называется *осью параболы* и проходит через начало координат, являющееся ее *вершиной* (см. рис. 4.18). Отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M параболы и вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (4.50)$$

Эксцентриситет ε любой параболы равен единице. Уравнение директрисы параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Если выбрана система координат Oxy, ось Ox которой направлена от фокуса F к директрисе, а началом координат явля-

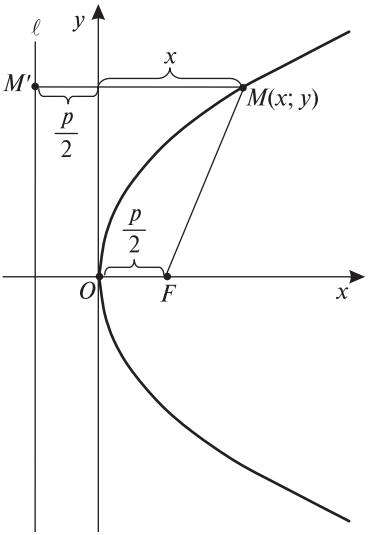


Рис. 4.18

ется та же точка O, то абсцисса и ордината фокуса будут равны соответственно $-\frac{p}{2}$ и 0. Следовательно, для любой точки M плоскости

$$FM = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Расстояние MM' от точек $M(x; y)$ до директрисы ℓ, расположенных слева и справа от нее, равны соответственно $-x + \frac{p}{2}$ и $x - \frac{p}{2}$. Таким образом, равенство (4.48) в координатной форме записывается в виде уравнения

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Проведя аналогичные преобразования данного уравнения, получим равносильное уравнение параболы следующего вида:

$$y^2 = -2px. \qquad (4.51)$$

Из (4.51) следует, что в выбранной системе координат абсциссы точек параболы неположительны, т. е. она располагается в левой координатной полуплоскости, симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат (рис. 4.19).

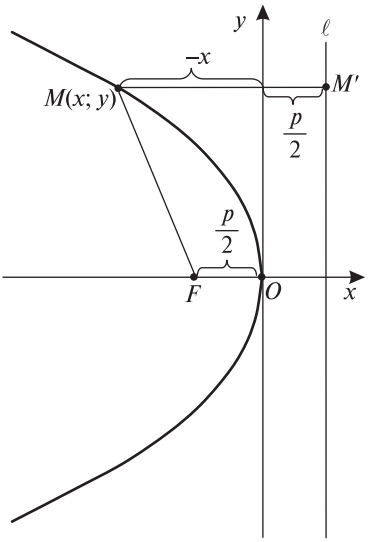


Рис. 4.19

Фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = x - \frac{p}{2},$$

а уравнение директрисы имеет вид

$$x = \frac{p}{2}.$$

Касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису. Уравнение касательной к параболе, проведенной в точке $M(x_1; y_1)$, в обеих рассмотренных системах координат имеет вид

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Пусть выбрана декартова система координат Oxy, ось Oy которой проходит через фокус перпендикулярно директрисе в направлении от нее к фокусу, а начало координат O равноудалено от фокуса и директрисы. Тогда

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right),\ FM = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

для любой точки $M(x; y)$ плоскости, $MM' = y + \frac{p}{2}$ и $MM' = -y - \frac{p}{2}$ для точек M, расположенных соответственно выше и ниже директрисы. Следовательно, координатная форма записи равенства (4.48) примет следующий вид:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \pm\left(y + \frac{p}{2}\right).$$

Проведя аналогичные преобразования приведенного уравнения, получим равносильное уравнение параболы следующего вида:

$$x^2 = 2py. \tag{4.52}$$

Из (4.52) следует, что в выбранной системе координат ординаты точек параболы неотрицательны, т. е. она располагается в верхней координатной полуплоскости симметрично относительно оси Oy и проходит через начало координат (рис. 4.20).

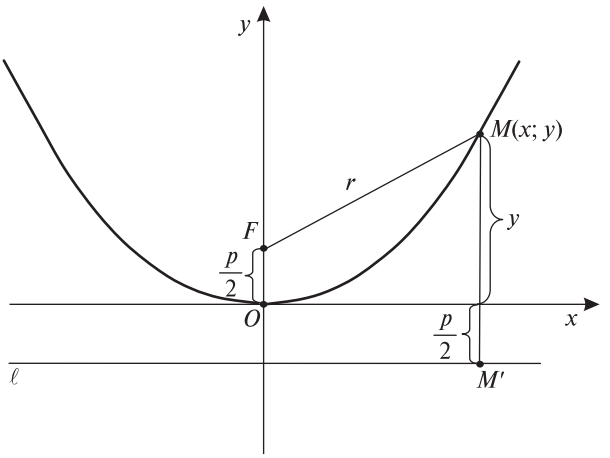


Рис. 4.20

Фокальный радиус точки $M(x; y)$ параболы в этом случае вычисляется по формуле

$$r = y + \frac{p}{2},$$

а уравнение директрисы имеет вид

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Если во введенной выше системе координат Oxy изменить направление оси Oy на противоположное (т. е. направить ее от фокуса к директрисе), то

$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right) \text{ и } FM = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

для любой точки $M(x;y)$ плоскости. Расстояния MM' равны $y - \frac{p}{2}$ и $-y + \frac{p}{2}$, для любых точек $M(x; y)$, расположенных соответственно выше и ниже директрисы. Следовательно, равенство (4.48) принимает следующий вид:

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \pm\left(y - \frac{p}{2}\right).$$

Проведя использовавшиеся ранее преобразования для данного уравнения, получим равносильное уравнение параболы следующего вида:

$$x^2 = -2py. \qquad (4.53)$$

Из (4.53) следует, что в выбранной системе координат ординаты точек параболы неположительны, т. е. она расположена в нижней координатной полуплоскости и симметрична относительно оси Oy, так как переменная x имеет четную степень (рис. 4.21).

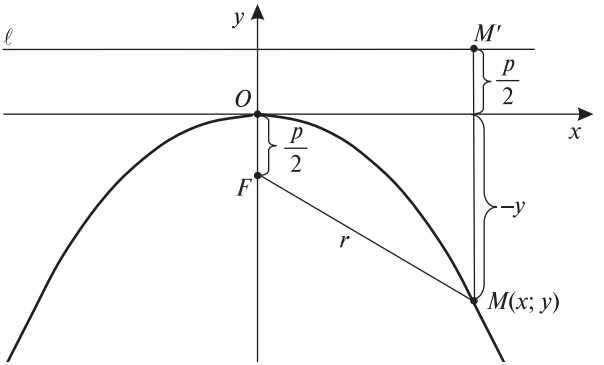


Рис. 4.21

Фокальный радиус точки $M(x; y)$ параболы в рассматриваемом случае вычисляется по формуле

$$r = y - \frac{p}{2},$$

а уравнение директрисы имеет вид

$$y = \frac{p}{2}.$$

Уравнение касательной к параболе, проведенной в точке $M(x_1; y_1)$, в последних двух рассмотренных системах координат имеет вид

$$xx_1 = p(y + y_1).$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Oy, а ее вершина находится в точке $O'(x_0; y_0)$, то уравнение параболы в зависимости от выбора системы координат имеет вид

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),\ (x - x_0)^2 = -2p(y - y_0). \qquad (4.54)$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox, а ее вершина находится в точке $O'(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),\ (y - y_0)^2 = -p(x - x_0).$$

Уравнение $y = ax^2 + bx + c$, правая часть которого является квадратным трехчленом, определяет параболу, ось симметрии которой параллельна оси Oy. При $a > 0$ парабола направлена вверх, а при $a < 0$ – вниз. Фокальный параметр p параболы и координаты ее вершины $O'(x_0; y_0)$ определяются формулами

$$p = \frac{1}{2|a|},\ x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (4.55)$$

Пример 4.28. На параболе, заданной уравнением $y^2 = 8x$, найти точки, расстояние от которых до директрисы равно 4.

Решение. Данное уравнение является каноническим уравнением параболы вида (4.49), следовательно, ее фокальный параметр $p = 4$. Так как фокальный радиус r каждой из этих точек равен 4, то, используя формулу (4.50), получим уравнение $x + 2 = 4$, из которого находим абсциссу $x = 2$ искомых точек. Подставляя в уравнение параболы $x = 2$, определяем их ординаты $y = \pm 4$. Таким образом, $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$ – искомые точки.

Ответ: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример 4.29. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы, заданной уравнением $y = -x^2 + 4x - 5$.

Решение. Правая часть заданного уравнения является квадратным трехчленом, в котором $a = -1$, $b = 4$, $c = -5$. Используя вторую и третью формулы (4.55), вычисляем координаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2,\ y_0 = \frac{4\cdot(-1)\cdot(-5) - 4^2}{4\cdot(-1)} = -1.$$

Следовательно, точка $O'(2; -1)$ – вершина данной параболы.

Осью симметрии параболы данного вида является прямая, параллельная оси Oy, проходящая через вершину $O'(2; -1)$. Следовательно, уравнение оси симметрии имеет вид $x = 2$.

Так как $-1 = a < 0$, то парабола направлена вниз и ее директриса (см. рис. 4.21) параллельна оси Ox и проходит выше параболы на расстоянии $\frac{p}{2}$ от ее вершины $O'(2; -1)$, т. е. через точку $O''\left(2; -1 + \frac{p}{2}\right)$. Следовательно, $y = -1 + \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. Используя первую формулу (4.55), вычисляя $p = \frac{1}{2|a|} = \frac{1}{2\cdot|-1|} = \frac{1}{2}$, получим уравнение директрисы вида $y = -\frac{3}{4}$.

Координаты вершины параболы можно найти, выделив в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$-(x^2 - 4x + 5) = -\left((x^2 - 2\cdot 2x + 2^2) - 4 + 5\right) = -(x-2)^2 - 1$$

и записав уравнение параболы в равносильном виде $-(y + 1) = (x - 2)^2$. Сравнивая полученное уравнение со вторым уравнением (4.54), определяем координаты вершины параболы $x = 2$ и $y = -1$.

Ответ: $O'(2; -1)$; $x = 2$; $y = -\frac{3}{4}$.

Пример 4.30. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4; -1)$ и имеет вершину, расположенную в начале координат.

Решение. Так как точка $A(4; -1)$, принадлежащая параболе, имеет положительную абсциссу, равную четырем, и парабола расположена симметрично относительно оси Ox, то ее уравнение имеет вид $y^2 = 2px$. Подставляя в него координаты точки A, получим уравнение $1 = 4\cdot 2p$, из которого находим $2p = \frac{1}{4}$. Таким образом, $y^2 = \frac{1}{4}x$ – уравнение данной параболы.

Ответ: $y^2 = \frac{1}{4}x$.

4.6. Общее уравнение второго порядка с тремя переменными

Ранее было показано, что в декартовой системе координат любое уравнение первого порядка с тремя переменными

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно, является уравнением плоскости.

Теперь рассмотрим уравнения второго порядка. *Общее уравнение второго порядка* с тремя переменными имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \qquad (4.56)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

Поверхности, которые описываются уравнениями второго порядка, называются *поверхностями второго порядка*.

В теории поверхностей второго порядка доказывается, что всегда можно перейти к новой системе координат, в которой уравнение (4.56) будет иметь один из следующих семнадцати видов:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0;$

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0;$

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

8) $y^2 = 2px;$

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$

10) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$

11) $y^2 - a^2 = 0;$

12) $y^2 = 0;$

13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$

15) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1;$

16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$

17) $y^2 + a^2 = 0,$

где коэффициенты a, b, c и p не равны нулю. Уравнения 1–17 называются *каноническими*.

Уравнения 15–17 соответствуют пустым множествам, так как не имеют действительных решений. Уравнение 14 описывает единственную точку пространства $O(0; 0; 0)$. Уравнение 13 описывает координатную ось Oz, так как для любой точки этой оси $x = y = 0$. Уравнение 12 описывает одну

плоскость Oxz. Уравнение 11 определяет две плоскости: $y - a = 0$ и $y + a = 0$, параллельные координатной плоскости Oxz; уравнение 10 также описывает две плоскости:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Уравнения 1–9 соответствуют новым геометрическим объектам: эллипсоиду, двуполостному гиперболоиду, однополостному гиперболоиду, эллиптическому параболоиду, гиперболическому параболоиду, эллиптическому цилиндру, гиперболическому цилиндру, параболическому цилиндру и конусу (перечислены в порядке возрастания номеров их уравнений).

4.6.1. Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры

Канонические уравнения эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.57}$$

гиперболического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.58}$$

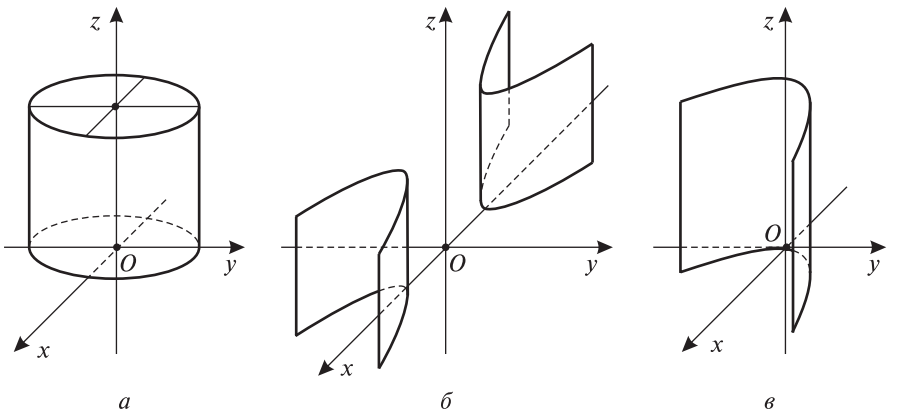


Рис. 4.22:
а – эллиптический цилиндр; *б* – гиперболический цилиндр;
в – параболический цилиндр

и параболического цилиндра

$$y^2 = 2px \tag{4.59}$$

совпадают по форме с уравнениями эллипса, гиперболы и параболы, лежащих в плоскости Oxy. В эти уравнения не входит переменная (координата) z. Поэтому если точка $M_1(x_1; y_1; 0)$ удовлетворяет уравнениям (4.57)–(4.59), то этим уравнениям удовлетворяют также точки с координатами $(x_1; y_1; z)$, где z – любое число. Таким образом, уравнения (4.57)–(4.59) описывают цилиндрические поверхности с прямолинейными образующими, параллельными оси Oz. Рисунок 4.22 дает представление о форме этих цилиндров.

4.6.2. Эллипсоид

Для исследования формы эллипсоида обратимся к его каноническому уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.60}$$

Из уравнения (4.60) вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат – центром симметрии. Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида и представляют собой длины отрезков от начала координат до точек пересечения эллипсоида с осями координат. Эллипсоид представляет собой ограниченную поверхность, заключенную, как это видно из уравнения (4.60), в параллелепипеде: $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Дополнительное представление о форме эллипсоида можно получить, если исследовать его методом сечений. Определим линию пересечения эллипсоида с плоскостью

$$z = h, \tag{4.61}$$

где $-c \le h \le c$, параллельной координатной плоскости Oxy. Линия пересечения поверхностей (4.60) и (4.61) задается системой из этих двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - h^2/c^2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - h^2/c^2}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

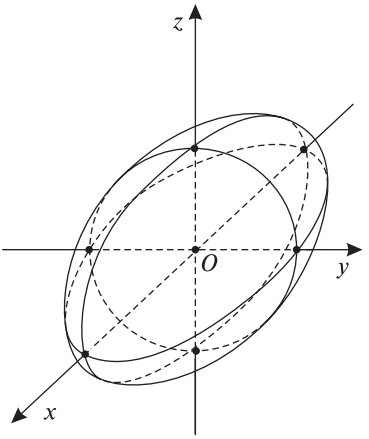


Рис. 4.23

Отсюда видно, что сечение эллипсоида плоскостью $z = h$ совпадает с сечением эллиптического цилиндра той же плоскостью и является эллипсом с полуосями $a\sqrt{1-h^2/c^2}$ и $b\sqrt{1-h^2/c^2}$. По мере увеличения $|h|$, т. е. по мере удаления плоскости сечения $z = h$ от центральной координатной плоскости Oxy (ее уравнение есть $z = 0$) размеры эллипсов в сечениях уменьшаются. Те же выводы справедливы и для сечений плоскостями $y = h$ и $x = h$, только величины полуосей эллипсов сечения будут другими. На рис. 4.23 дано схематическое изображение эллипсоида.

В частных случаях $a = b \neq c$, $a = c \neq b$ и $b = c \neq a$ эллипсоид называется эллипсоидом вращения, так как при этом он может быть получен вращением эллипса вокруг его осей симметрии. Например, эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

получается вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (лежащего в плоскости Oxz) вокруг оси Oz. В случае $a = b = c$ уравнение (4.60) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{4.62}$$

Уравнение (4.62) определяет множество точек пространства, равноудаленных от начала координат. Таким образом, уравнению (4.62) соответствует сфера (сферическая поверхность) радиусом a с центром в начале координат.

Уравнение

$$(x-d)^2 + (y-p)^2 + (z-s)^2 = a^2 \tag{4.63}$$

определяет множество точек в пространстве, равноудаленных от точки $C(d; p; s)$, т. е. оно определяет сферу радиусом a с центром в точке $C(d; p; s)$ (рис. 4.24). Уравнение (4.62) называется каноническим уравнением сферы, а уравнение (4.63) – общим уравнением сферы.

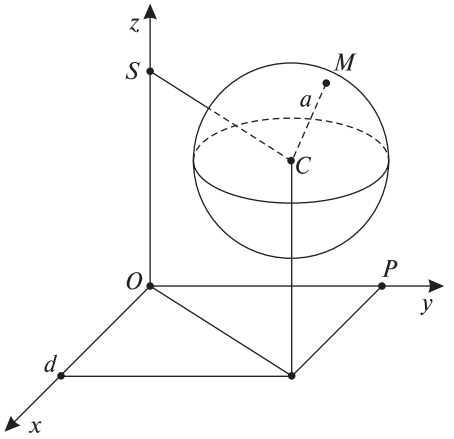


Рис. 4.24

Пример 4.31. Написать уравнение сферы радиусом $R = 3$ с центром в точке $C(2; -5; 1)$.

Решение. Подставив значения координат точки C и значение радиуса в формулу (4.63), получим $(x-2)^2+(y-(-5))^2+(z-1)^2=3^2$ или $(x-2)^2+$ $+(y+5)^2+(z-1)^2=9$.

Ответ: $(x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=9$.

Пример 4.32. Доказать, что уравнение $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ является уравнением сферы. Найти ее центр и радиус.

Решение. Преобразуем левую часть данного уравнения:

$$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2-6z+9-9+5=0,$$

или

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3^2.$$

Это уравнение описывает сферу с центром в точке $C(1; -2; 3)$ и $R = 3$.

Ответ: $C(1; -2; 3)$, $R = 3$.

4.6.3. Двуполостный гиперболоид

Для исследования формы двуполостного гиперболоида обратимся к его каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (4.64)$$

Из уравнения (4.64) вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперболоида, а начало координат – центром симметрии.

В частном случае, когда $a = b \neq c$, уравнение (4.64) описывает двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{4.65}$$

который может быть получен вращением вокруг оси Oz гиперболы, что то же самое, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ $\left(\text{или, что то же самое, } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\right)$, лежащей в плоскости Oxz (рис. 4.25). Двуполостный гиперболоид вращения (4.65) показан на рис. 4.26. В сечениях этой поверхности плоскостями $z = h$, $|h| \geq c$ лежат круги, так как линии пересечения определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h \end{cases}$$

или эквивалентной системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right), \\ z = h. \end{cases}$$

Так как порождающая эту поверхность гипербола $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ состоит из двух изолированных друг от друга ветвей (см. рис. 4.25), то и сама поверхность также состоит из двух изолированных полостей.

В общем случае, когда $a \neq b \neq c$, двуполостный гиперболоид (4.64) выглядит практически так же, как это изображено на рис. 4.26. Только в сечениях плоскостями $z = h$, $|h| \geq c$ лежат уже не круги, а эллипсы, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h \end{cases}$$

или эквивалентной системой

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{h^2/c^2 - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{h^2/c^2 - 1}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

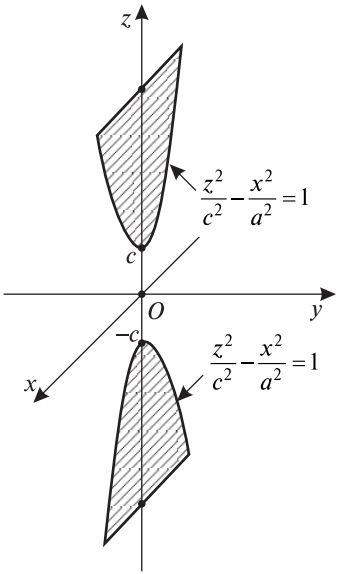


Рис. 4.25

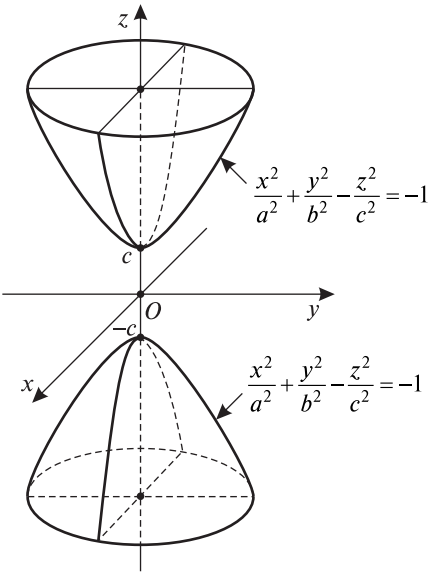


Рис. 4.26

В сечениях двуполостного гиперболоида (4.64) плоскостями $x = h$, $h \geq 0$, или плоскостями $y = h$, $h \geq 0$, лежат гиперболы, определяемые, например, системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \\ y = h \end{cases}$$

или эквивалентной ей системой

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{\left(a\sqrt{h^2/c^2-1}\right)^2}+\dfrac{x^2}{\left(b\sqrt{h^2/c^2-1}\right)^2}=1, \\ y = h. \end{cases}$$

4.6.4. Однополостный гиперболоид

Для получения двуполостного гиперболоида вращения мы вращали гиперболу $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ (см. рис. 4.25) вокруг пересекающей гиперболу оси симметрии Oz. Если мы теперь будем вращать указанную гиперболу вокруг

другой ее оси симметрии – оси Ox, которая не пересекает саму гиперболу, то получим поверхность

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.66}$$

называемую однополостным гиперболоидом вращения, ориентированным вдоль оси Ox. Однако на рисунке удобнее изобразить однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ориентированный вдоль оси Oz (рис. 4.27). Он получается вращением гиперболы $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ лежащей в координатной плоскости Oyz, вокруг не пересекающей гиперболу оси симметрии Oz. Каждая из ветвей гиперболы порождает при вращении одну и ту же поверхность, которая, таким образом, состоит из одной полости. Это обстоятельство и определяет название поверхности. В случае общего уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.67}$$

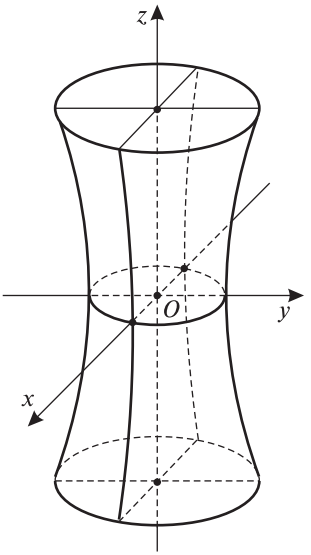


Рис. 4.27

однополостный гиперболоид выглядит примерно так же, как это изображено на рис. 4.27, только теперь в сечениях плоскостями $z=h$ лежат не окружности, а эллипсы, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h\end{cases}$$

или эквивалентной ей системой

$$\begin{cases}\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+h^2/c^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+h^2/c^2}\right)^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

В сечениях однополостного гиперболоида (4.67) плоскостями $x=h$ или плоскостями $y=h$ лежат гиперболы, определяемые, например, системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=h \end{cases}$$

или эквивалентной ей системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$$

Из последней системы видно, что гиперболы в сечениях $y = h$, $|h| < b$ и гиперболы в сечениях $y = h$, $|h| > b$ ориентированы в пространстве различным образом. В первом случае гиперболы пересекаются осью симметрии, параллельной оси Ox, а во втором случае – пересекаются осью симметрии, параллельной оси Oz. В промежуточном случае, т. е. в сечении плоскостями $y = \pm b$, получается пара прямых линий $\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0$ и $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0$.

4.6.5. Эллиптический параболоид

Рассмотрим параболу $z=\dfrac{x^2}{a^2}$, лежащую в плоскости Oxz. При вращении этой параболы вокруг оси Oz образуется поверхность

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}, \tag{4.68}$$

называемая параболоидом вращения (рис. 4.28). Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0 \tag{4.69}$$

выглядит практически так же, как и изображенный на рис. 4.28 параболоид вращения. Только в сечении его плоскостями $z = h$, $h \geq 0$, лежат уже не окружности, а эллипсы, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-z=0, \\ z=h \end{cases}$$

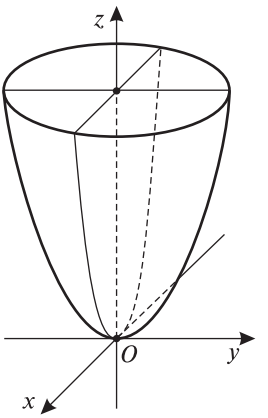


Рис. 4.28

или эквивалентной системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{h}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{h}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида (4.69).

4.6.6. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0. \tag{4.70}$$

Исследуем форму гиперболического параболоида методом сечений. Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $z = h$ представляют собой при $h > 0$ гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{h}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{h}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

а при $h < 0$ получаются иначе ориентированные гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{|h|}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{|h|}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В сечении плоскостью $z = 0$ лежат прямые

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются для любых h параболами

$$\begin{cases} z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = h \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z = -\dfrac{h^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

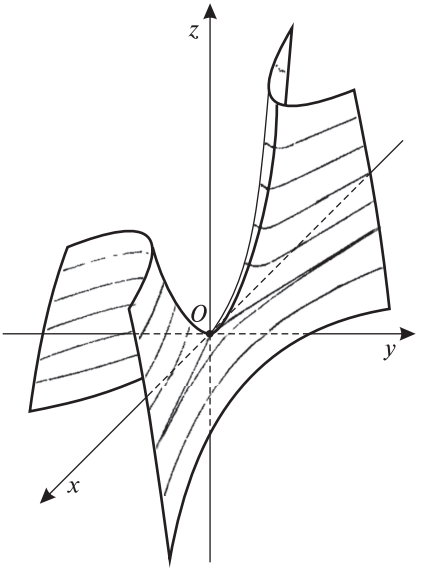


Рис. 4.29

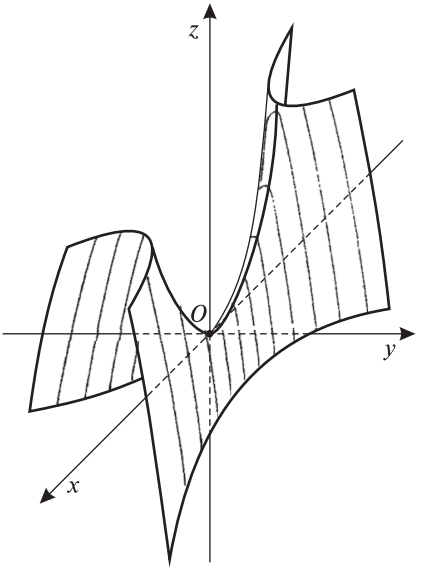


Рис. 4.30

Схематическое изображение гиперболического параболоида дано на рис. 4.29 и 4.30. На первом из этих рисунков показаны также гиперболические сечения плоскостями $z = h$, а на втором из них – параболические сечения плоскостями $x = h$.

4.6.7. Конус

Каноническое уравнение конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (4.71)$$

Убедимся, что этот конус образован прямыми линиями, проходящими через начало координат O. Точка $O(0; 0; 0)$, принадлежащая конусу, называется вершиной конуса. Пусть точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$, отличная от начала координат, принадлежит конусу (4.71), т. е. ее координаты удовлетворяют равенству

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 0. \qquad (4.72)$$

Тогда любая точка M_2 прямой l, проходящей через точки O и M, также принадлежит конусу. Действительно, радиус-векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$

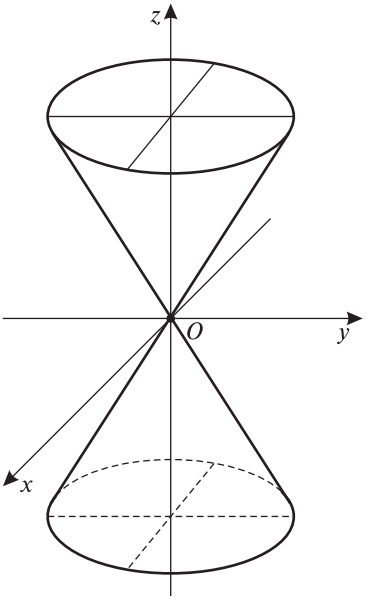


Рис. 4.31

коллинеарны (они лежат на одной прямой). Тогда справедливо равенство $\overrightarrow{OM_2} = \lambda\overrightarrow{OM_1}$, где $\lambda \neq 0$. Отсюда находим, что $\overrightarrow{OM_2} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$, т. е. точка M_2 имеет координаты $(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$, удовлетворяющие в силу равенства (4.50) уравнению конуса (4.71).

Итак, конус образован прямыми линиями, проходящими через начало координат. Рисунок 4.31 дает представление о форме конуса. Легко убедиться, что сечения конуса (4.71) плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(ah/c)^2} + \dfrac{y^2}{(bh/c)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В частном случае $a = b$ получается обычный круговой конус, известный из курса математики средней школы.

Поверхности второго порядка находят широкое применение в технических устройствах. Например, первая телевизионная мачта в Москве, построенная по проекту В. Г. Шухова, имеет форму однополостного гиперболоида вращения. В осветительных устройствах металлические отражатели имеют форму параболоида вращения и т. д.

4.7. Прямая и плоскость в пространстве

При выборе в пространстве декартовой прямоугольной системы координат поверхности определяются уравнениями вида

$$F(x; y; z) = 0 \text{ или } z - f(x; y) = 0,$$

где $F(x; y; z)$ – математическое выражение, зависящее от переменных x, y, z, а $z = f(x; y)$ – некоторая функция двух переменных. Таким образом, *поверхностью* называется геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют одному из уравнений указанного вида. Поверхность, определяемая уравнением $z - f(x; y) = 0$, называется *графиком функции* двух переменных $z = f(x; y)$.

Определение. *Линией* в пространстве называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} F_1(x;\, y;\, z) = 0, \\ F_2(x;\, y;\, z) = 0. \end{cases}$$

Пересечение поверхностей, заданных уравнениями $F_1(x;\, y;\, z) = 0$ и $F_2(x;\, y;\, z) = 0$, задает линию в пространстве.

Линия может быть задана *параметрически*, т. е. тремя уравнениями

$$x = x(t),\, y = y(t),\, z = z(t),$$

зависящими от параметра t, который изменяется в пределах $t_1 \le t \le t_2$. Выбирая конкретное значение t и вычисляя значения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, получим тройку чисел x, y, z, которая определяет некоторую точку пространства. Множество точек, получаемых при изменении значений параметра t в заданных пределах, образует в пространстве линию.

Пересечение поверхностей, заданных тремя уравнениями

$$F_1(x;\, y;\, z) = 0,\, F_2(x;\, y;\, z) = 0,\, F_3(x;\, y;\, z) = 0,$$

определяется множеством решений системы из трех уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x;\, y;\, z) = 0, \\ F_2(x;\, y;\, z) = 0, \\ F_3(x;\, y;\, z) = 0. \end{cases}$$

Каждое решение x, y, z этой системы определяет координаты одной из точек пересечения данных поверхностей.

Плоскость в пространстве. При выборе в пространстве прямоугольной декартовой системы координат плоскости определяются линейными уравнениями различного вида, которые выводятся из векторного уравнения плоскости или получаются с помощью необходимого и достаточного условия компланарности трех векторов.

Пусть задан вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный заданной плоскости, который называется ее *нормальным вектором* (или просто *нормалью*), и ее точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$. Условием принадлежности точки $M(x;\, y;\, z)$ заданной плоскости является перпендикулярность векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 4.32), что равносильно (в силу пятого свойства скалярного произведения векторов) равенству нулю их скалярного произведения, т. е. выполнению равенства $\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$. Выражая далее вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$ в виде разности радиус-векторов $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, получим векторное уравнение плоскости вида

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \qquad (4.73)$$

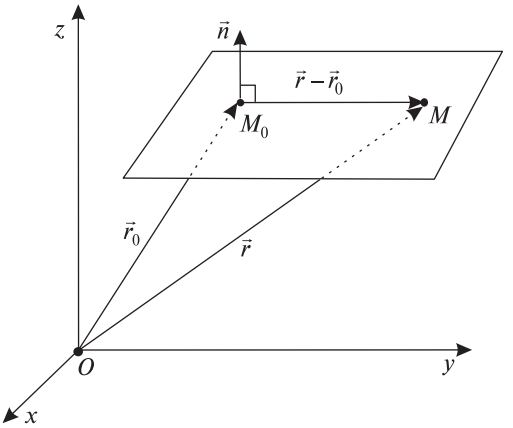


Рис. 4.32

Записав уравнение (4.73) в координатной форме, получим *уравнение плоскости по нормальному вектору и точке*:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.74)$$

Избавившись от скобок в уравнении (4.74) и положив $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получим *общее уравнение прямой*

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4.75)$$

Если в уравнении (4.75) все коэффициенты A, B, C и свободный член D отличны от нуля, то, перенеся D с противоположным знаком в правую часть уравнения (4.75) и умножив затем обе его части на $-\frac{1}{D}$, получим *уравнение плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ – величины отрезков, отсекаемых плоскостью соответственно на координатных осях Ox, Oy, Oz.

Пусть заданы два вектора $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$, параллельные или принадлежащие плоскости, и ее точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Тогда условием принадлежности точки $M(x; y; z)$ данной плоскости (рис. 4.33) является компланарность трех векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, что в свою очередь равносильно равенству нулю определителя, элементами которого являются координаты указанных векторов. Таким образом, равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.76)$$

после вычисления определителя и приведения подобных членов определяет *уравнение плоскости по двум вектором и точке*.

Если заданы две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ плоскости и вектор $\vec{s} = (m, n, p)$, параллельный ей, то произвольная точка $M(x; y; z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}$ компланарны (рис. 4.34), т. е. выполняется

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.77)$$

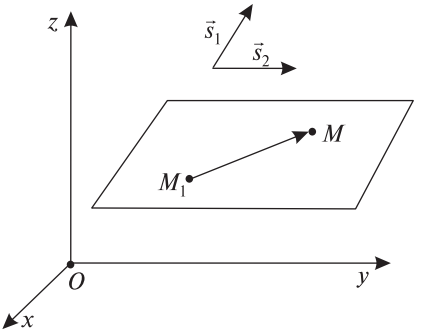


Рис. 4.33

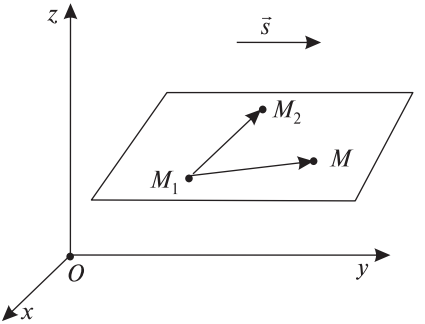


Рис. 4.34

Равенство (4.77) после его преобразования определяет *уравнение плоскости по двум точкам и вектору*.

Любые три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ определяют единственную плоскость. Условием принадлежности любой точки $M(x; y; z)$ этой плоскости является принадлежность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ плоскости, т. е. их компланарность (рис. 4.35), что равносильно

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Данное равенство определяет *уравнение плоскости по трем точкам*.

Пусть задана плоскость, не проходящая через начало координат O, точка плоскости $P(x_1; y_1; z_1)$, являющаяся основанием перпендикуляра OP длиной p, опущенного из начала координат O на плоскость (рис. 4.36). Тогда уравнение (4.74) для данной плоскости примет вид

$$\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \cos\beta(y - p\cos\beta) + \cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0$$

при выборе в качестве нормали нормированного вектора $\vec{n} = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$, координаты которого

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{p},\ \cos\beta = \frac{y_1}{p},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{p}.$$

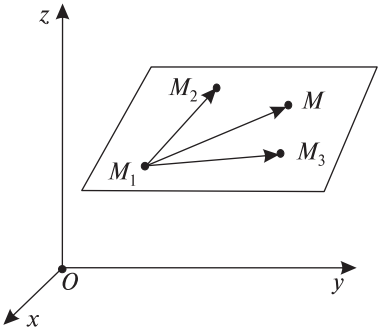


Рис. 4.35

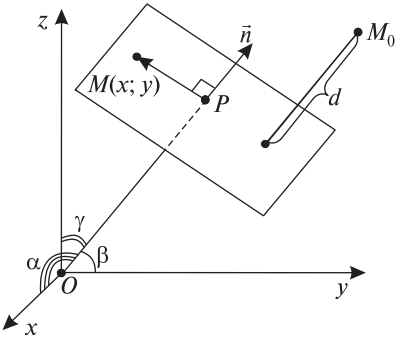


Рис. 4.36

Полученное уравнение с учетом равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ приводится к равносильному виду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (4.78)$$

Уравнение (4.78) называется *нормальным уравнением плоскости* и используется для нахождения расстояния d от произвольной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости (см. рис. 4.36):

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z\cos\gamma - p|. \qquad (4.79)$$

Если плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то для получения ее нормального уравнения достаточно умножить обе части уравнения на *нормирующий множитель* $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, при этом его знак выбирается противоположным знаку D, так как в (4.78) $-p < 0$. Таким образом, в данном случае в силу (4.79) расстояние d вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.80)$$

Угол между двумя плоскостями равен углу φ между их нормалями. Если плоскости заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z = 0$, то их нормалями являются векторы $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ и, следовательно, угол φ определяют следующие формулы:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В пространстве плоскости могут располагаться параллельно, совпадать или пересекаться по прямой. Расположение плоскостей полностью определяется их нормалями.

Условием параллельности двух плоскостей, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, является параллельность их нормалей $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, т. е. их коллинеарность (рис. 4.37). Таким образом, равенства

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (4.81)$$

являющиеся условием коллинеарности нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, определяют условия параллельности двух плоскостей либо их совпадения. При этом равенства

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

являются необходимыми и достаточными условиями их совпадения, так как первое уравнение получается из второго умножением последнего на константу, равную отношениям (4.81), т. е. оба уравнения определяют одну и ту же плоскость.

Соотношения вида

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

гарантируют параллельность плоскостей.

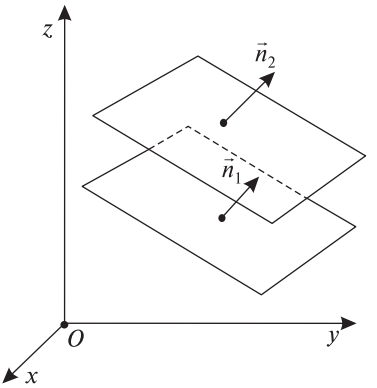


Рис. 4.37

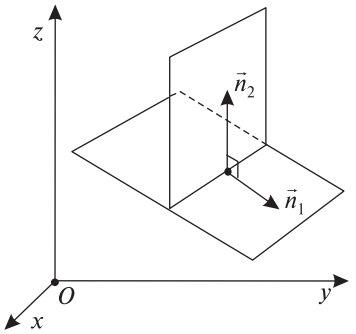


Рис. 4.38

Из равенств (4.81) следует, что плоскости пересекаются при нарушении хотя бы одного из них, т. е. соотношения

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

являются необходимыми и достаточными условиями пересечения двух плоскостей. В частности, условием перпендикулярности двух плоскостей является перпендикулярность их нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (рис. 4.38), что равносильно равенству нулю их скалярного произведения $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$. Записав его в координатной форме, получим необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 4.33. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 3; -1)$ и $M_2(-1; 2; 4)$.

Решение. Так как плоскость параллельна оси Oz, то направляющий вектор этой оси $\vec{k} = (0, 0, 1)$ также параллелен плоскости. Имея две точки плоскости и вектор, параллельный ей, можно записать ее уравнение в виде (4.77)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель разложением по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x-2 & y-3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -x + 3y - 7$$

и приравняв его нулю, получим уравнение плоскости $-x + 3y - 7 = 0$.

Ответ: $-x + 3y - 7 = 0$.

Пример 4.34. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3; 7; -1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то направляющий вектор $\vec{i} = (1; 0; 0)$ этой оси можно выбрать в качестве нормали пло-

скости и записать ее уравнение вида (4.74). Таким образом, искомое уравнение $x-3=0$.

Ответ: $x-3=0$.

Пример 4.35. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;\ 7;\ -1)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $2x-3y+5z-4=0$.

Решение. Вектор $\vec{n}=(2;-3;5)$ является нормалью плоскости, заданной уравнением $2x-3y+5z-4=0$. Так как искомая плоскость параллельна ей, то этот вектор можно выбрать в качестве нормали искомой плоскости. Воспользовавшись тем, что точка $A(2;\ 3;\ -1)$ принадлежит искомой плоскости, записываем ее уравнение $2(x-2)-3(y-3)+5(z+1)=0$ вида (4.74), из которого нетрудно получить общее уравнение плоскости $2x-3y+5z+10=0$.

Ответ: $2x-3y+5z+10=0$.

Пример 4.36. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$ и $M_2(-2;\ -1;\ 3)$, перпендикулярно плоскости $x+4y-2z+5=0$.

Решение. Вектор $\vec{n}=(1;4;-2)$ является нормалью плоскости, заданной уравнением $x+4y-2z+5=0$, и, следовательно, параллелен искомой плоскости, которая перпендикулярна заданной. Имея две точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(-2;\ -1;\ 3)$ искомой плоскости и вектор $\vec{n}$, параллельный ей, можно записать ее уравнение вида (4.77)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислив определитель по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=6(x-1)-12(z-3)+3(z-3)-6(y-2)=6x-6y-9z+33$$

и приравняв его нулю, получим общее уравнение плоскости $6x-6y-9z+33=0$.

Ответ: $6x-6y-9z+33=0$.

Пример 4.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ -2;\ 6)$, $M_2(5;\ -4;\ -2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

Решение. Если обозначить через a, b, c соответственно величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz, то уравнение искомой плоскости в отрезках запишется в следующем виде:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1,$$

так как по условию $a = b$. Подставляя поочередно координаты точек $M_1(1; -2; 6)$ и $M_2(5; -4; -2)$ в приведенное уравнение, получим систему уравнений для определения a и b вида

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{5}{a} - \frac{4}{a} - \frac{2}{c} = 1, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{1}{a} - \frac{2}{c} = 1. \end{cases}$$

Прибавляя ко второму уравнению первое, получим $\frac{4}{c} = 2$, откуда находим $c = 2$. Подставляя $c = 2$ во второе уравнение, находим $a = \frac{1}{2}$.

Таким образом, искомое уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{2} = 1,$$

из которого нетрудно получить общее уравнение $4x + 4y + z - 2 = 0$.

Ответ: $4x + 4y + z - 2 = 0$.

Пример 4.38. На оси Ox найти точки, равноудаленные от точки $A(9; -2; 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ – одна из искомых точек. Так как она принадлежит оси Ox, то $y = 0$ и $z = 0$. Используя формулы (3.3) и (4.80), вычисляем расстояние d_1 между точками $M(x; 0; 0)$, $A(9; -2; 2)$ и расстояние d_2 от точки $M(x; 0; 0)$ до плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$:

$$d_1 = \sqrt{(x-9)^2 + (0+2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + 8};$$

$$d_2 = \frac{|3x - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7}.$$

Согласно условию $d_1 = d_2$, следовательно, $\frac{|3x-3|}{7} = \sqrt{(x-9)^2 + 8}$. Так как обе части полученного уравнения неотрицательны, то оно равносиль-

но уравнению $(3x-3)^2 = 49\left(\sqrt{(x-9)^2+8}\right)^2$. Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и приведя подобные члены, получим уравнение $5x^2 - 108x + 544 = 0$, решениями которого являются $x_1 = 8$ и $x_2 = \frac{68}{5}$. Следовательно, искомыми являются две точки $M_1(8;\ 0;\ 0)$ и $M_2\left(\frac{68}{5}; 0; 0\right)$.

Ответ: $M_1(8;\ 0;\ 0)$, $M_2\left(\frac{68}{5}; 0; 0\right)$.

4.7.1. Уравнения прямой в пространстве

В трехмерном пространстве при задании точки $M_1(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и направляющего вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ прямой, как и в плоском случае, ее *векторно-параметрическое уравнение* определяется формулой (3.17). Записав уравнение (3.17) в координатной форме и воспользовавшись определением равенства векторов, получим *параметрические уравнения* прямой в пространстве, которые имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \tag{4.82}$$

Разрешая данные уравнения относительно параметра t и приравнивая соответствующие выражения, получим *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{4.83}$$

В (4.83) числа x_1, y_1, z_1 определяют точку прямой, а m, n, p являются координатами ее направляющего вектора $\vec{s}$. Следовательно, равенство нулю в (4.83) одного из чисел m, n, p означает, что направляющий вектор перпендикулярен координатной оси, соответствующей нулевой координате. Если в (4.83) некоторая пара чисел из m, n, p равна нулю, то $\vec{s}$ перпендикулярен координатной плоскости, определяемой его нулевыми координатами.

Если заданы две различные точки прямой $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то в качестве ее направляющего вектора можно выбрать вектор $\vec{s} = \overline{M_1M_2}$. Подставляя координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ этого вектора в (4.83), получим *уравнение прямой по двум ее точкам*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.84}$$

Пересечением двух плоскостей, заданных общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

является прямая при условии неколлинеарности их нормалей $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ (рис. 4.39). Следовательно, система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4.85}$$

определяет в пространстве прямую и называется *общими уравнениями прямой*.

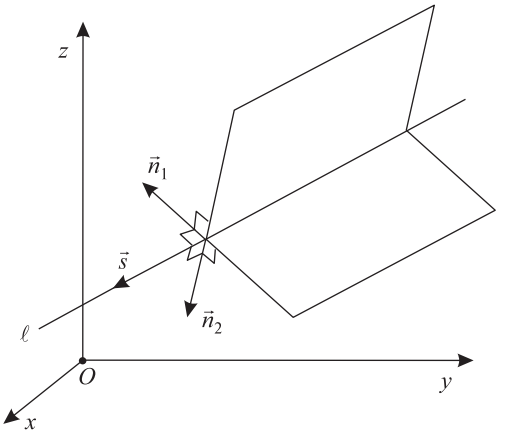


Рис. 4.39

Если прямая задана общими уравнениями, то для получения канонических уравнений необходимо найти ее некоторую точку и направляющий вектор. Для нахождения точки прямой достаточно, положив в (4.84) $z = z_1$, найти решение $x = x_1$, $y = y_1$ системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Тройка чисел x_1, y_1, z_1 определяет точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямой. Так как нормали $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны прямой, принадлежащей обеим заданным плоскостям, то они перпендикулярны любому ее направляющему вектору $\vec{s}$ (см. рис. 4.39). Следовательно, в качестве $\vec{s}$ можно выбрать векторное произведение нормалей, т. е. согласно (2.12) положить:

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{4.86}$$

Для нахождения уравнения прямой вида (4.85) достаточно найти вторую точку прямой, заданной общими уравнениями, положив для этого $z = z_2$ в (4.85) и решив систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z_2 + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямая задана каноническим уравнением (4.83), то ее общие уравнения определяются равносильными системами линейных уравнений вида

$$\begin{cases} n(x - x_1) = m(y - y_1), \\ p(x - x_1) = m(z - z_1), \end{cases} \begin{cases} m(y - y_1) = n(x - x_1), \\ p(y - y_1) = m(z - z_1), \end{cases} \begin{cases} m(z - z_1) = p(x - x_1), \\ n(z - z_1) = p(y - y_1). \end{cases}$$

4.7.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут быть параллельными, совпадать, пересекаться и скрещиваться. При этом в первых трех случаях прямые должны принадлежать одной и той же плоскости.

Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тогда $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – точки, принадлежащие соответственно первой и второй прямой, а $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – их направляющие векторы. Условием принадлежности данных прямых одной плоскости является (рис. 4.40) компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, что равносильно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.87)$$

При выполнении (4.87) условием совпадения прямых является коллинеарность трех векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, что равносильно выполнению равенств

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \qquad (4.88)$$

Параллельность данных прямых означает коллинеарность направляющих векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и неколлинеарность векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 4.41).

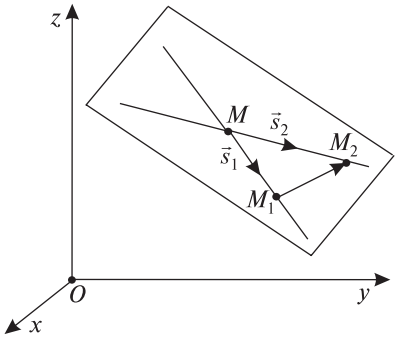


Рис. 4.40

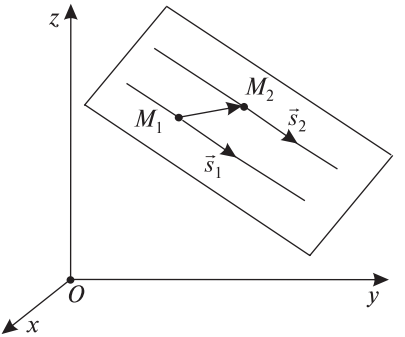


Рис. 4.41

Следовательно, необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является выполнение первых двух равенств и нарушение хотя бы одного из двух последних равенств (4.88), т. е. выполнение соотношений

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2},\ \frac{x_2-x_1}{m_1}\neq\frac{y_2-y_1}{n_1},\ \text{или}\ \frac{x_2-x_1}{m_1}\neq\frac{z_2-z_1}{p_1},\ \text{или}\ \frac{y_2-y_1}{n_1}\neq\frac{z_2-z_1}{p_1}.$$

При выполнении (4.87) условием пересечения двух прямых является неколлинеарность направляющих векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ (см. рис. 4.40), что равносильно нарушению хотя бы одного из первых двух равенств (4.88). Следовательно, при выполнении (3.7) необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых является выполнение соотношения

$$\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}\ \text{или}\ \frac{m_1}{m_2}\neq\frac{p_1}{p_2}\ \text{или}\ \frac{n_1}{n_2}\neq\frac{p_1}{p_2}. \tag{4.89}$$

При пересечении двух прямых необходимым и достаточным условием их перпендикулярности является ортогональность векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, что равносильно равенству нулю их скалярного произведения, т. е. выполнению равенства

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Необходимым и достаточным условием скрещивания прямых в пространстве является выполнение соотношения

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Угол между пересекающимися или скрещивающимися прямыми равен углу φ между их направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, косинус которого находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_1^2}}. \qquad (4.90)$$

Расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямой ℓ, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

можно вычислить с помощью векторного произведения $[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s}]$ или найти из прямоугольного треугольника $M_1M_0M_0'$, где $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой ℓ, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – ее точка, а M_0' – ортогональная проекция точки M_0 на прямую. Действительно, для параллелограмма M_1M_0NP, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\vec{s}$, площадь которого равна $|\vec{s}|\cdot d$ (рис. 4.42), в силу определения векторного произведения выполняется равенство $|\vec{s}|\cdot d = \left|[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s}]\right|$, из которого следует

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s}]\right|}{|\vec{s}|}.$$

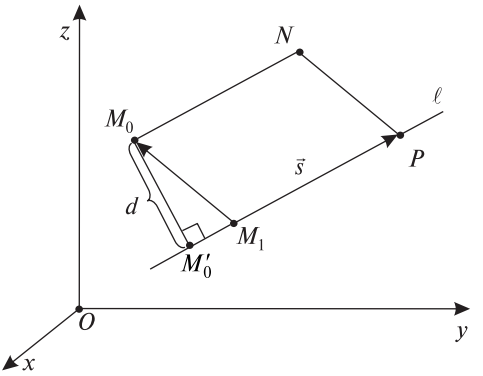


Рис. 4.42

Вычислив абсолютную величину проекции $\text{пр}_{\vec{s}}\,\overrightarrow{M_1M_0}$ вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор $\vec{s}$, равную

$$\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s})\right|}{|\vec{s}|},$$

из прямоугольного треугольника $M_1M_0M_0'$ (см. рис. 4.42), используя теорему Пифагора находим

$$d=\frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|^2\cdot|\vec{s}|^2-(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{s})^2}}{|\vec{s}|}.$$

Пример 4.39. Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases}x-4y+5z-1=0,\\2x+3y+z+9=0,\end{cases}$$

и определить углы между этой прямой и координатными осями.

Решение. Вычислим координаты точки M_1, принадлежащей заданной прямой. Для этого положим $z_1=0$ и найдем решение $x_1=-3$, $y_1=-1$ системы

$$\begin{cases}x-4y-1=0,\\2x+3y+9=0.\end{cases}$$

Используя формулу (4.86), находим координаты направляющего вектора $\vec{s}=(m,n,p)$:

$$m=\begin{vmatrix}-4 & 5\\3 & 1\end{vmatrix}=-19,\ n=-\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 1\end{vmatrix}=9,\ p=\begin{vmatrix}1 & -4\\2 & 3\end{vmatrix}=11$$

и записываем канонические уравнения

$$-\frac{x+3}{19}=\frac{y+1}{9}=\frac{z}{11}$$

вида (4.83) для заданной прямой.

Углы между заданной прямой и координатными осями Ox, Oy, Oz равны соответственно углам α, β, γ между их направляющими векторами $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$ и вектором $\vec{s}=(-19;9;11)$, косинусы которых можно вычислить по формуле (4.89):

$$\cos\alpha=\frac{-19}{\sqrt{(-19)^2+9^2+11^2}}=\frac{-19}{\sqrt{563}};$$

$$\cos\beta=\frac{9}{\sqrt{(-19)^2+9^2+11^2}}=\frac{9}{\sqrt{563}};$$

$$\cos\gamma=\frac{11}{\sqrt{(-19)^2+9^2+11^2}}=\frac{11}{\sqrt{563}}.$$

Следовательно, углы между заданной прямой и координатными осями

$$\alpha = \arccos\frac{-19}{\sqrt{563}} \approx 143°;\ \beta = \arccos\frac{9}{\sqrt{563}} \approx 68°;\ \gamma = \arccos\frac{11}{\sqrt{563}} \approx 62°.$$

Ответ: $-\frac{x+3}{19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{11}$; $\alpha \approx 143°$; $\beta \approx 68°$; $\gamma \approx 62°$.

Пример 4.40. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$, параллельно: а) прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$; б) оси Oz.

Решение. а) Согласно формуле (4.83) $\vec{s} = (1; 3; 2)$ является направляющим вектором прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}.$$

Так как искомая прямая параллельна заданной прямой, то $\vec{s}$ – направляющий вектор обеих прямых. Следовательно, с учетом принадлежности точки $M(1; -1; 2)$ искомой прямой ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

б) По аналогии с решением а) направляющий вектор $\vec{i} = (1; 0; 0)$ оси Ox можно считать направляющим вектором искомой прямой. Следовательно, ее канонические уравнения, согласно (4.83), имеют вид

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

Ответ: а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$; б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Пример 4.41. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; -2; 5)$, углы между которой и прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}$ и $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}$, равны 90°.

Решение. Векторы $\vec{s}_1 = (-1; 2; 2)$ и $\vec{s}_2 = (6; 3; -2)$, согласно (4.83), являются направляющими векторами прямых, заданных соответственно каноническими уравнениями

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2} \text{ и } \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}.$$

Углы между прямыми равны углам между их направляющими векторами. Так как в данном случае эти углы равны 90°, то скалярные произве-

дения направляющего вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ искомой прямой и векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ равны нулю. Следовательно, записав в координатной форме равенства $(\vec{s}, \vec{s}_1) = 0$, $(\vec{s}, \vec{s}_2) = 0$, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -m + 2n + 2p = 0, \\ 6m + 3n - 2p = 0 \end{cases}$$

для определения координат вектора $\vec{s}$.

Так как система состоит из двух уравнений, зависящих от трех переменных, то полагая, например, $p = 3$, получим систему

$$\begin{cases} -m + 2n + 6 = 0, \\ 6m + 3n - 6 = 0, \end{cases}$$

решив которую найдем $m = 2$, $n = -2$. Таким образом, канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (2; -2; 3)$, проходящей через точку $M(2; -2; 5)$, имеют следующий вид:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{3}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{3}$.

Пример 4.42. Найти параметрические уравнения прямых, на которых расположены диагонали параллелограмма, вершинами которого являются точки $A(2; 4; 6)$, $B(-3; 5; 4)$, $C(8; -6; 2)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AC} = (6; -10; -4)$ – направляющий вектор прямой, на которой расположена диагональ AC. Следовательно, ее параметрические уравнения (4.82) при выборе точки $A(2; 4; 6)$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = 2 + 6t, \\ y = 4 - 10t, \\ z = 6 - 4t. \end{cases}$$

Для записи параметрических уравнений прямой, на которой расположена диагональ BD, достаточно найти координаты точки $M(x_1; y_1; z_1)$ – центра параллелограмма, который делит обе диагонали пополам. Так как точка M делит диагональ AC пополам, то, используя формулу для вычисления координат середины отрезка, находим

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5,\ y_1 = \frac{4-6}{2} = -1,\ z_1 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Точка M принадлежит диагонали BD, следовательно, пары точек B, D и B, M определяют одну и ту же прямую. Выбирая в качестве направляющего вектора этой прямой $\overrightarrow{BM} = (8; -6; 0)$ и точку $B(-3; 5; 4)$, записываем ее параметрические уравнения вида (4.82)

$$\begin{cases} x = -3 + 8t, \\ y = 5 - 6t, \\ z = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3 + 8t, \\ y = 5 - 6t, \\ z = 4. \end{cases}$

Пример 4.43. Исследовать взаимное расположение двух прямых, заданных параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t, \end{cases}$$

и в случае их пересечения вычислить угол между ними и найти их общую точку.

Решение. Из (4.82) следует, что точки $M_1(1; 7; 3)$ и $M_2(6; -1; -2)$ принадлежат соответственно первой и второй прямым, заданным параметрическими уравнениями, а их направляющими векторами являются $\vec{s}_1 = (2; 1; 4)$ и $\vec{s}_2 = (3; -2; 1)$. Выясним, принадлежат ли прямые одной и той же плоскости или нет. Для этого записываем определитель из равенства (4.87) и вычисляем его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 5 - 96 + 40 + 16 + 15 = 0.$$

Следовательно, согласно (4.87) прямые принадлежат одной плоскости.

Вычисляя отношения соответствующих координат направляющих векторов и сравнивая их, проверяем условие их пересечения (4.89). Так как $\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{2}$, то прямые пересекаются. Далее, используя формулу (4.90), вычисляем косинус угла между ними:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{21 \cdot 14}} = \frac{8}{7\sqrt{6}}$$

и определяем угол $\varphi \approx \arccos\frac{8}{7\sqrt{6}} \approx 62°$.

Найдем общую точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ указанных прямых. Так как M_0 принадлежит обеим прямым, то ее координаты должны удовлетворять параметрическим уравнениям первой прямой при некотором $t = t_1$ и второй — при $t = t_2$, т. е. должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t_1, \\ y_0 = 7 + t_1, \\ z_0 = 3 + 4t_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 6 + 3t_2, \\ y_0 = -1 - 2t_2, \\ z_0 = -2 + t_2. \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений обеих систем, получим следующую систему линейных уравнений для определения t_1 и t_2:

$$\begin{cases} 1 + 2t_1 = 6 + 3t_2, \\ 7 + t_1 = -1 - 2t_2, \\ 3 + 4t_1 = -2 + t_2. \end{cases}$$

Найдя из второго уравнения $t_1 = -8 - 2t_2$ и подставляя его значение в третье, определяем $t_2 = -3$. Далее вычисляем координаты точки M_0:

$$x_0 = 6 + 3 \cdot (-3) = -3, \; y_0 = -1 - 2 \cdot (-3) = 5, \; z_0 = -2 - 3 = -5.$$

Ответ: прямые пересекаются в точке $M_0(-3; 5; -5)$.

4.8. Многомерные точечные пространства. Гиперплоскости и выпуклые множества

При введении на плоскости и в геометрическом пространстве декартовой системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между их точками M и упорядоченными парами x_1, x_2 и тройками чисел x_1, x_2, x_3, принадлежащих множеству вещественных чисел R.

Указанное соответствие позволяет ввести понятие точечного пространства размерности n, которое обозначается R^n и называется *n-мерным арифметическим пространством*. Пространство R^n образуют упорядоченные наборы из n вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, которые называются точками и обозначаются $(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ считаются координатами точки M. В контексте введенного понятия плоскость и геометрическое трехмерное пространство можно рассматривать как двух и трехмерные арифметические пространства, которые обозначаются соответственно R^2 и R^3.

На плоскости R^2 прямой является множество точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению вида $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Любая пря-

мая разделяет R^2 на две *полуплоскости*, которые определяются неравенствами $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$ соответственно.

Плоскость пространства R^3 совпадает с множеством точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Любая плоскость разбивает R^3 на два *полупространства*, определяемые неравенствами $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ge b$ соответственно.

В n-мерном пространстве R^n аналогичным свойством обладает множество точек, которое называется *гиперплоскостью*. Любую гиперплоскость образуют точки, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \tag{4.91}$$

Таким образом, любая гиперплоскость, определяемая уравнением (4.91), разбивает все пространство R^n на два множества, называемых *полупространствами*, координаты точек которых удовлетворяют соответственно линейным неравенствам следующего вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b. \tag{4.92}$$

Любое неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b$, умножая обе его части на -1, можно записать в равносильном виде $-a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n \le -b$. Поэтому достаточно рассматривать неравенства вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$.

Чтобы выяснить, какое из полупространств определяет заданное неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$, достаточно выбрать в R^n произвольную точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не принадлежащую гиперплоскости, заданной уравнением (4.91), и вычислить значение правой части неравенства. Если неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ окажется справедливым, то оно определяет ту полуплоскость, которой принадлежит выбранная точка M. В противном случае неравенство определяет полупространство, которому точка M не принадлежит. Пересечением любых двух полупространств, определяемых неравенствами (4.92), является гиперплоскость, заданная уравнением (4.91).

По аналогии с пространством R^3 любая упорядоченная пара точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства R^n определяет n-мерный вектор

$$\overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n), \tag{4.93}$$

длина которого равна $\overrightarrow{MN} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_n - x_n)^2}$. Расстояние $\rho(M, N)$ между точками M и N считается равным длине вектора $|\overrightarrow{MN}|$, т. е.

$$\rho(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_n - x_n)^2}.$$

В пространстве R^n ε-*окрестность* точки M образуют точки, расстояние от которых до точки M меньше ε, т. е. точки N, для которых выполняется неравенство $\rho(M, N) < \varepsilon$.

Точка M множества X называется его *внутренней точкой*, если существует ε-окрестность этой точки, принадлежащая X. *Граничной точкой* множества X называется точка (не обязательно принадлежащая X), в любой ε-окрестности которой найдется хотя бы одна точка из X. *Границей* множества X называется множество всех его граничных точек.

Множество X называется *открытым* в R^n, если все его точки являются внутренними и *замкнутым*, если ему принадлежит его граница. Множество X называется *ограниченным* в R^n, если расстояние между любыми двумя его точками конечно.

Гиперплоскость, определяемая уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, называется *опорной гиперплоскостью* для множества X, если она имеет с X хотя бы одну общую точку и X принадлежит одному из полупространств, определяемых этой гиперплоскостью. При этом полупространство, которому принадлежит X, называется его *опорным полупространством*, а вектор $\vec{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — *нормальным вектором* гиперплоскости.

При фиксации в пространстве R^n точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ с нулевыми координатами каждой точке $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ставится в соответствие вектор $\overrightarrow{ON}$, который называется ее радиус-вектором. В силу (4.93) координаты радиус-вектора $\overrightarrow{ON}$ совпадают с координатами точки N.

Введенные в гл. 3 операции сложения n-мерных векторов и умножения их на скаляр позволяют для любых точек M, N определить точки $P = \lambda M$, $Q = M + N$, радиус-векторами которых являются соответственно векторы $\lambda\overrightarrow{OM} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$. Следовательно, точки P и Q определяются следующим образом:

$$P = P(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),\ Q = Q(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Введенные в рассмотрение точки $P = \lambda M$ и $Q = M + N$ позволяют определить в R^n *отрезок* MN как множество точек вида $\lambda M + (1-\lambda)N$, где λ — параметр, принимающий числовые значения $0 \le \lambda \le 1$, что в свою очередь позволяет ввести в R^n понятие выпуклости множества точек.

Множество X точек пространства R^n называется *выпуклым*, если для любых двух точек M, N из X отрезок MN целиком содержится в X, т. е. точка $\lambda M + (1-\lambda)M$ принадлежит X при любом $0 \le \lambda \le 1$.

Выпуклые множества обладают следующими свойствами:

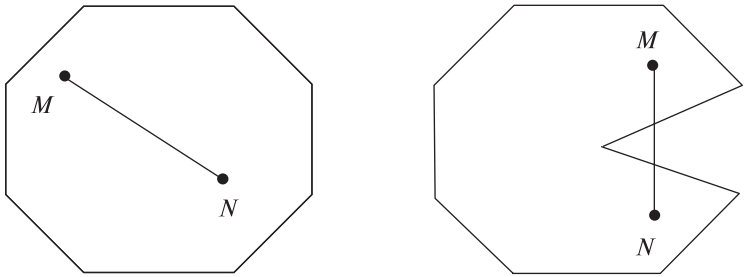
1) пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством или пустым;

2) для любого ограниченного замкнутого выпуклого множества существует опорная гиперплоскость с любым заданным нормальным вектором;

3) любое замкнутое выпуклое множество представимо в виде пересечения совокупности его опорных полупространств.

Любое полупространство в R^n, определяемое одним из неравенств (4.92), является выпуклым множеством. Гиперплоскость, являющаяся пересечением двух полупространств, также является выпуклым множеством.

На рис. 4.43 изображено соответственно выпуклое (*а*) и невыпуклое (*б*) множество, принадлежащее R^2.



а *б*

Рис. 4.43

Из свойств 1)–3) выпуклых множеств вытекает

Теорема 4.1. *Любое замкнутое выпуклое множество пространства R^n является множеством решений некоторой (возможно, бесконечной) системой линейных неравенств.*

На практике и в теории широко используются замкнутые выпуклые множества, являющиеся решениями конечных систем линейных неравенств вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{4.94}$$

Такие множества пространства R^n в случае их ограниченности называются *выпуклыми многогранниками*. Таким образом, множество решений совместной системы линейных неравенств вида (4.94) представляет собой либо выпуклый многогранник, либо выпуклую неограниченную многогранную область, либо пустое множество точек.

Частным случаем системы (4.94), допускающим наглядный графический метод решения, является система линейных неравенств с двумя переменными, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \qquad (4.95)$$

Линейные системы неравенств указанного вида возникают при моделировании многих экономических задач. Например, неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ задает *бюджетное множество*, которое образуют всевозможные пары чисел x_1, x_2, определяющих количество товаров двух видов, которые можно приобрести по цене a_1, a_2 при наличии b денежных средств.

Графический метод решения систем вида (4.95) состоит в последовательном просмотре ее неравенств, начиная с первого, построении на плоскости R^2 соответствующих полуплоскостей и нахождении их пересечения.

Пример 4.44. Построить на плоскости множество решений системы линейных неравенств $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Ox_1x_2, выберем первое неравенство $3x_1 + 2x_2 = 6$ и определим соответствующую полуплоскость. Для этого вначале строим на плоскости прямую, заданную уравнением $3x_1 + 2x_2 = 6$. Полагая последовательно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ в правой части уравнения, находим две точки $M_1(0;\ 3)$, $M_2(2;\ 0)$ и проводим через них прямую ℓ_1 (рис. 4.44). Выбирая далее точку $O(0;\ 0)$ и полагая $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ в правой части неравенства $3x_1 + 2x_2 = 6$, убеждаемся в его справедливости. Следовательно, неравенство определяет полуплоскость с точкой O. Отметим эту полуплоскость штриховкой, перпендикулярной прямой ℓ_1 (см. рис. 4.44).

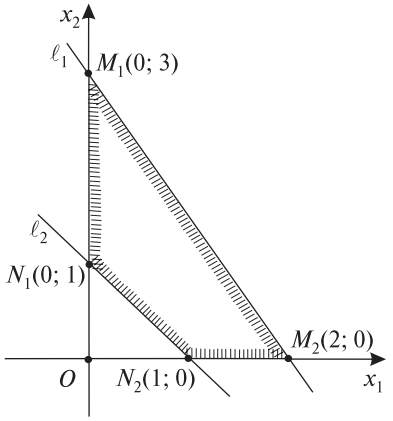


Рис. 4.44

Далее выбираем второе неравенство $x_1 + x_2 \ge 1$ и строим соответствующую полуплоскость. Полагая в правой части уравнения $x_1 + x_2 = 1$ поочередно $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, находим две точки $N_1(0;\ 1)$, $N_2(1;\ 0)$ и проводим через них прямую ℓ_2. Выбирая ту же точку O и полагая $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ в правой части неравенства, по-

лучаем невозможное соотношение $0 \geq 1$. Следовательно, неравенство $x_1 + x_2 \geq 1$ определяет полуплоскость, которой не принадлежит точка O. Отмечаем эту полуплоскость штриховкой, перпендикулярной прямой ℓ_2.

Неравенства $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ определяют верхнюю и правую координатные полуплоскости, которые пометим вертикальной и горизонтальной штриховками. Так как множеством решений данной системы является пересечение построенных полуплоскостей, то оно выделено на плоскости всеми четырьмя штриховками, т. е. совпадает с четырехугольником $M_1M_2N_1N_2$.

Задачи для самостоятельного решения

Раздел 4.1

4.1. Вычислить проекции отрезка на координатные оси, если известна его длина d и угол φ между осью Ox и прямой, на которой лежит отрезок:

а) $d = 12,\ \varphi = \frac{2\pi}{3}$; б) $d = 6,\ \varphi = -\frac{\pi}{6}$; в) $d = 2,\ \varphi = -\frac{\pi}{4}$.

4.2. Вычислить длину отрезка d и угол φ между осью Ox и прямой, на которой лежит отрезок, если известны его проекции на координатные оси:

а) $X = 1,\ Y = \sqrt{3}$; б) $X = 3\sqrt{2},\ Y = -3\sqrt{2}$; в) $X = -2\sqrt{3},\ Y = 2$.

4.3. Даны точки $M_1(2; -3)$, $M_2(1; -4)$, $M_3(-1; -7)$, $M_4(-4; 8)$. Для указанных ниже отрезков вычислить их длины и угол между осью Ox и прямой, на которой они лежат:

а) M_1M_2; б) M_1M_3; в) M_2M_4; г) M_4M_3.

4.4. Длина отрезка $d = 5$, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат:

а) острый угол; б) тупой угол.

4.5. Известно, что длина отрезка AB равна 17, его концом является точка $B(-7; 3)$ и проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс:

а) острый угол; б) тупой угол.

4.6. Найти проекцию отрезка на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = \frac{2\pi}{3}$, если его проекции на координатные оси $X = 1,\ Y = -\sqrt{3}$.

4.7. Даны две точки $A(1; -5)$ и $B(4; -1)$. Найти проекцию отрезка AB на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

4.8. Даны две точки $M_1(2; -2)$ и $M_2(7; -3)$. Найти проекцию отрезка M_1M_2 на ось, проходящую через точки $A(5; -4)$, $B(-7; 1)$ в направлении:
а) от A к B; б) от B к A.

4.9. Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние d между точками:
а) A и B; б) B и C; в) A и C; г) C и D; д) A и D; е) D и E.

4.10. Даны две смежные вершины квадрата $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.

4.11. Вычислить площадь равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.

4.12. Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

4.13. Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины находятся в точках $K(4; 9)$ и $M(-2; 1)$. Вычислить площадь этого ромба.

4.14. Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины находятся в точках $K(3; -4)$ и $M(1; 2)$. Вычислить длину высоты этого ромба.

4.15. Доказать, что точки $A(3; -5)$, $B(-2; -7)$, $C(18; 1)$ лежат на одной прямой.

4.16. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(1; 1)$, $A_2(2; 3)$, $A_3(5; -1)$ прямоугольный.

4.17. Доказать, что точки $A(2; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(-5; 3)$, $D(-2; -1)$ являются вершинами квадрата.

4.18. Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$, $P(0; 4)$ острые.

4.19. Точки $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ и $C(3; 3)$ являются вершинами треугольника. Вычислить его внутренние углы.

4.20. Вершины треугольника находятся в точках $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$, $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Вычислить его внешний угол при вершине A.

4.21. На оси ординат найти точку M, расстояние от которой до точки $N(-8; 13)$ равно 17.

4.22. Даны две точки $M(2; 2)$ и $N(5; -2)$. На оси абсцисс найти точку P такую, что угол MPN – прямой.

4.23. Определить координаты точки M_2, расположенной симметрично точке $M_1(1; 2)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1; 0)$, $B(-1; -2)$.

4.24. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 0)$ и $C(-4; 1)$. Найти две его другие вершины.

4.25. Даны две смежные вершины квадрата $A(2; -1)$ и $B(-1; 3)$. Определить две его другие вершины.

4.26. Даны две точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Определить координаты:
а) точки M, расположенной симметрично точке A относительно точки B;
б) точки N, симметричной точке B относительно точки A.

4.27. Точки $M(1; -1)$, $N(-1; 4)$ и $P(-2; 2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

4.28. Даны три вершины параллелограмма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

4.29. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3; 5)$, $B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины.

4.30. Даны вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$, $C(-5; 2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

4.31. Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

4.32. Даны вершины треугольника $A(2; -5)$, $B(1; -2)$, $C(4; 7)$. Найти координаты точки пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

4.33. Даны вершины треугольника $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$ и $C(-1; -2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

4.34. Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-4; 1)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.

4.35. Даны вершины треугольника $A(3; -5)$, $B(1; -3)$, $C(2; -2)$. Определить длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B.

4.36. Даны три точки $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ и $C(4; 5)$, лежащие на одной прямой. Определить, в каком отношении каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими точками.

4.37. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2; 2)$ и $Q(1; 5)$ делится на три равные части.

4.38. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки:
а) $A(2; -3)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 5)$;
б) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$, $M_3(1; 3)$;
в) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$, $P(4; 5)$.

4.39. Вершинами треугольника являются точки $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины C.

4.40. Вершинами параллелограмма являются точки $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ и $C(-3; 1)$, определить его площадь.

4.41. Вершинами параллелограмма являются точки $A(3; 7)$, $B(2; -3)$, $C(-2; 4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

4.42. Даны последовательные вершины однородной четырехугольной пластинки $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(-1; 7)$, $D(-7; 5)$. Определить координаты ее центра тяжести, который находится в точке пересечения медиан.

4.43. Площадь параллелограмма равна 17 кв. ед.; двумя его вершинами являются точки $A(2; 1)$ и $B(5; -3)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма, если пересечение его диагоналей лежит на оси ординат.

Разделы 4.2 и 4.3

4.44. Найти точку пересечения двух прямых, заданных уравнениями $3x - 4y - 29=0$ и $2x + 5y + 19 = 0$.

4.45. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$ соответственно. Определить его вершины.

4.46. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

4.47. Стороны треугольника лежат на прямых, заданных уравнениями $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь.

4.48. Точки $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$ являются вершинами треугольника ABC, площадь которого равна 8 кв. ед. Найти координаты вершины C, если она принадлежит прямой $2x + y - 2 = 0$.

4.49. Составить уравнение прямой и изобразить ее на плоскости, если известен угловой коэффициент k и отсекаемый ею на оси Oy отрезок b:

а) $k = \frac{2}{3}$, $b = 3$; в) $k = 0$, $b = -2$; д) $k = -2$, $b = -5$;

б) $k = 3$, $b = 0$; г) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; е) $k = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

4.50. Для заданных прямых определить угловой коэффициент k и отсекаемый ею на оси Oy отрезок b:

а) $5x - y + 3 = 0$; в) $5x + 3y + 2 = 0$; д) $y - 3 = 0$.

б) $2x + 3y - 6 = 0$; г) $3x + 2y = 0$;

4.51. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент прямой:

а) параллельной данной прямой;

б) перпендикулярной к данной прямой.

4.52. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой.

4.53. Найти вершины прямоугольника, если заданы уравнения $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ двух его сторон и уравнение $7x + y - 15 = 0$ одной из его диагоналей.

4.54. Найти проекцию точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

4.55. Найти точку Q, расположенную симметрично точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

4.56. Составить уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым и находящейся на равном расстоянии от каждой из них:

а) $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$; в) $5x + 7y + 15 = 0$, $5x + 7y + 3 = 0$;

б) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$; г) $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$.

4.57. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки:

а) $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; б) $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; в) $A(5; -3)$, $B(-1; 6)$.

4.58. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ треугольника параллельно противоположным сторонам.

4.59. Составить уравнения сторон треугольника, если известны середины его сторон $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$.

4.60. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3; -4)$ и уравнения двух его высот $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$.

4.61. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $Q(-1; 0)$ перпендикулярно к отрезку PQ, где $P(2; 3)$.

4.62. Найти точку пересечения высот треугольника, если его стороны заданы уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.

4.63. Даны вершины $A(2; -2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 7)$ треугольника ABC. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

4.64. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 0)$.

4.65. Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $O(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

4.66. Записать уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 5$ и координаты вершины прямого угла $C(4; -1)$.

4.67. Даны уравнения катета $y = 2x$ и середина гипотенузы – точка $K(4; 2)$ прямоугольного равнобедренного треугольника. Найти уравнения двух других его сторон.

4.68. Даны вершины $A(4; -4)$, $B(-6; -1)$, $C(-2; -4)$ треугольника ABC. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C и медианы, проведенной из этой вершины.

4.69. Даны уравнения $5x + y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ двух сторон прямоугольника и уравнение $3x + 7y = 0$ его диагонали. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

4.70. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 5)$, расстояния до которой от точек $A(-7; 3)$ и $B(11; -15)$ равны.

4.71. Найти точку M_1, расположенную симметрично точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.

4.72. Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, одна из диагоналей которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения его сторон и второй диагонали.

4.73. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$ и $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.

4.74. Точка $E(1; -1)$ является центром квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y + 12 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат его остальные стороны.

4.75. Составить уравнения биссектрис углов между указанными прямыми:
а) $3x - 4y + 2 = 0$, $5x + 12y - 3 = 0$;
б) $3x - y + 5 = 0$, $3x + y - 4 = 0$.

4.76. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

4.77. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -3)$ параллельно заданной прямой:
а) $16x - 24y - 7 = 0$; б) $2x + 3 = 0$; в) $3y - 1 = 0$.

4.78. Доказать, что данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:
а) $x + 5y - 35 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$;
б) $12x + 15y - 8 = 0$, $16x + 9y - 7 = 0$;
в) $8x - 33y - 19 = 0$, $12x + 55y - 19 = 0$;
г) $3x + 5 = 0$, $y - 2 = 0$.

4.79. Доказать, что заданные прямые параллельны:
а) $3x + 5y - 4 = 0$; $6x + 10y + 7 = 0$;
б) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$; $y + 3 = 0$, $5y - 7 = 0$.

4.80. Доказать, что заданные прямые совпадают:
а) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$;
б) $x - y\sqrt{2} = 0$, $x\sqrt{2} - 2y = 0$;
в) $x\sqrt{3} - 1 = 0$, $3x - \sqrt{3} = 0$.

4.81. При каких значениях m и n прямые $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$:
а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.

4.82. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны две вершины $A(3; -1)$, $B(5; 7)$ и точка $N(4; -1)$ пересечения его высот.

4.83. В треугольнике ABC высоты AN, BN заданы уравнениями $4x - 3y = 0$, $7x + 2y - 22 = 0$ соответственно, а сторона AB уравнением $5x - 3y + 2 = 0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты треугольника ABC.

4.84. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ его двух медиан.

4.85. Составить уравнения сторон треугольника, если известны его вершина $B(2; -1)$ и уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из разных его вершин.

4.86. Найти уравнения сторон треугольника, если известна его вершина $A(3; -1)$ и уравнения биссектрисы $x - 4y + 10 = 0$ и медианы $6x + 10y - 59 = 0$, проведенных из разных его вершин.

4.87. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей совместно с прямыми $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ треугольник, площадь которого равна 1,5 кв. ед.

4.88. На прямой $2x - y - 5 = 0$ найти точку P, сумма расстояний от которой до точек $A(-7; 1)$ и $B(-5; 5)$ – наименьшая.

4.89. На прямой $3x - y - 1 = 0$ найти точку P, разность расстояний от которой до точек $A(4; 1)$ и $B(0; 4)$ была бы наибольшей.

4.90. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ под углом 45° к заданной прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

4.91. Среди прямых, проходящих через точку $P(3; 0)$, найти прямую такую, что ее отрезок, отсекаемый прямыми $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$, делится точкой P пополам.

4.92. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-5; 4)$, если известно, что длина ее отрезка, отсекаемого прямыми $x + 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, равна 5.

4.93. При каком значении m прямые $(m - 1)x + my - 5 = 0$, $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ пересекаются в точке, принадлежащей оси абсцисс.

4.94. Выяснить, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

4.95. Определить, при каком значении a прямая $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$:

а) параллельна оси абсцисс;

б) параллельна оси ординат;

в) проходит через начало координат.

Для каждого случая записать уравнение прямой.

4.96. Определить, при каких значениях m и n прямая $(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$ параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 5. Записать уравнение этой прямой.

Разделы 4.4 и 4.5

4.97. Записать матрицу данной квадратичной формы:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

б) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

в) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$.

4.98. Записать квадратичную форму по заданной матрице:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

4.99. С помощью ортогонального преобразования привести квадратичную форму к каноническому виду и записать вид этого ортогонального преобразования:

а) $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 48x_1x_2 + 27x_2^2$;

в) $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 7x_2^2$;

г) $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2$.

4.100. Найти уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

а) и полуоси равны 5 и 2;

б) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами – 8;

в) малая ось равна 24, а расстояние между фокусами – 10;

г) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

д) большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

е) малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

ж) расстояние между директрисами равно 5, а расстояние между фокусами – 4;

з) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами – 16;

и) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами – 13;

к) расстояние между его директрисами равно 32, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

4.101. Определить длины полуосей каждого из заданных эллипсов:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $x^2+25y^2=25$; д) $4x^2+9y^2=25$;

б) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; г) $x^2+5y^2=15$; е) $9x^2+25y^2=1$.

4.102. Для заданного эллипса $9x^2+25y^2=225$ найти:

а) полуоси; в) эксцентриситет;

б) фокусы; г) уравнения директрис.

4.103. Определить графически, какие из точек $A_1(-2;\,3)$, $A_2(2;\,-2)$, $A_3(2;\,-4)$, $A_4(-1;\,3)$, $A_5(-4;\,-3)$, $A_6(3;\,-1)$, $A_7(3;\,-2)$, $A_8(2;\,1)$, $A_9(0;\,15)$, $A_{10}(0;\,-16)$ принадлежат эллипсу $8x^2+5y^2=77$, а какие расположены внутри и вне него.

4.104. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $F(-2;\,0)$. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, расположенной в той же координатной полуплоскости, которой принадлежит фокус F.

4.105. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{1}{2}$, его центр совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, расположенного в той же координатной полуплоскости, которой принадлежит заданная директриса.

4.106. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 14.

4.107. Найти уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если известны:

а) точка $M_1(-2\sqrt{5};\,2)$ эллипса и его малая полуось $b=3$;

б) точка $M_2(2;\,-2)$ эллипса и его большая полуось $a=4$;

в) точки $M_1(4;\,\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2};\,3)$ эллипса;

г) точка $M_1(\sqrt{15};\,-1)$ эллипса и расстояние между его фокусами, равное 8;

д) точка $M_1\left(2;\,-\frac{5}{3}\right)$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$;

е) точка $M(8;\,12)$ эллипса и расстояние от нее до левого фокуса, равное 20;

ж) точка $M(-\sqrt{5};\,2)$ эллипса и расстояние между его директрисами, равное 10.

4.108. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(3;\ 0)$ и оси ординат в точке $B(0;\ -4)$. Составить уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны координатным осям.

4.109. Точка $C(-3;\ 2)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Найти уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны координатным осям.

4.110. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами малой оси эллипса.

4.111. Доказать, что каждое из заданных уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

4.112. Составить уравнение эллипса, если известны его:

а) большая ось, равная 26, и фокусы $F_1(-10;\ 0)$, $F_2(14;\ 0)$;

б) малая ось, равная 2, и фокусы $F_1(-1;\ -1)$, $F_2(1;\ 1)$;

в) фокусы $F_1\ F_1\left(-2; \frac{3}{2}\right)$, $F_2\ F_2\left(2; -\frac{3}{2}\right)$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) фокусы $F_1(1;\ 3)$, $F_2(3;\ 1)$ и расстояние между директрисами, равное $12\sqrt{2}$.

4.113. Определить, при каких значениях m прямая $y = -x + m$:

а) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;

б) касается его;

в) проходит вне этого эллипса.

4.114. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y + 7 = 0$.

4.115. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярных к прямой $2x - 2y - 13 = 0$.

4.116. На эллипсе $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $2x - 3y + 25 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_0 до этой прямой.

4.117. Из точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти их уравнения.

4.118. Из точки $C(10; -8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4.119. Эллипс проходит через точку $A(4; -1)$ и касается прямой $x+4y-10=0$. Составить уравнение этого эллипса при условии, что его оси совпадают с осями координат.

4.120. Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $3x-2y-20=0$, $x+6y-20=0$, при условии, что его оси совпадают с осями координат.

4.121. Прямая $x-y-5=0$ касается эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Составить уравнение этого эллипса.

4.122. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к эллипсу $3x+10y-25=0$ и его малая полуось $b=2$.

4.123. Определить точки пересечения двух эллипсов $x^2+9y^2-45=0$ и $x^2+9y^2-6x-27=0$.

4.124. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R=3$;

б) центр окружности совпадает с точкой $C(2; -3)$ и ее радиус $R=7$;

в) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6; -8)$;

г) окружность проходит через точку $A(2;6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$;

д) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

е) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x+4y+20=0$ является касательной к окружности;

ж) центр окружности совпадает с точкой $C(1; -1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;

з) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;

и) окружность проходит через три точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$;

к) окружность проходит через три точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$ и $M_3(5; 5)$.

4.125. Через точку $M_1(1; -2)$ проведена окружность радиусом 5, касающаяся оси Ox. Определить центр C окружности.

4.126. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1;\ 0)$ и касаются двух параллельных прямых: $2x + y + 2 = 0$ и $2x + y - 18 = 0$.

4.127. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x + y = 0$, касается прямых $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$.

4.128. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: $x + 2y - 9 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.

4.129. Выявить, какие из нижеприведенных уравнений определяют окружности, и найти центр C и радиус R каждой из них:

а) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$;
б) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$;
в) $(x-5)^2 + (y + 2)^2 = 0$;
г) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$;
д) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
ж) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
з) $x^2 + y^2 + x = 0$,
и) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
к) $x^2 + y^2 + y = 0$.

4.130. Построить графики следующих линий:

а) $y = +\sqrt{9 - x^2}$;
б) $y = -\sqrt{25 - x^2}$;
в) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;
г) $x = \sqrt{16 - y^2}$;
д) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$;
е) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$;
ж) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;
з) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$;
и) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;
к) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

4.131. Составить уравнение прямой, на которой лежит диаметр окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярной к прямой $5x + 2y - 13 = 0$.

4.132. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx + b$:

а) пересекает окружность $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;
б) касается этой окружности;
в) проходит вне этой окружности.

4.133. Определить условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

4.134. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;-1)$ и точки пересечения двух окружностей $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$.

4.135. Точка $M_1(x_1;\ y_1)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Найти уравнение касательной к этой окружности в точке M_1.

4.136. Из точки $A(4;\ 2)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 = 10$. Определить угол, образованный этими касательными.

4.137. Из точки $P(2; -3)$ проведены касательные к окружности, заданной уравнением $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4.138. Из точки $C(6; -8)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=25$. Вычислить расстояние d от точки C до хорды, соединяющей точки касания.

4.139. Вычислить длину касательной, проведенной из точки $A(1; -2)$ к окружности $x^2+y^2+6x+2y+5=0$.

4.140. Составить уравнения касательных к окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+10x+2y+6=0$, которые параллельны прямой $2x+y-7=0$.

4.141. Определить острый угол, образованный при пересечении прямой $3x-y-1=0$ и окружности $(x-2)^2+y^2=5$ (углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к окружности, проведенной в точке их пересечения).

4.142. Определить, под каким углом пересекаются две окружности: $(x-3)^2+$ $+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ (углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке пересечения).

4.143. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны:

а) ее действительная ось $2a=10$ и мнимая ось $2b=8$;

б) расстояние между фокусами $2c=10$ и мнимая ось $2b=8$;

в) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

г) действительная ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

д) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$;

е) расстояние между директрисами, равное $22\frac{2}{13}$, и расстояние между фокусами $2c=26$;

ж) расстояние между директрисами, равное $\frac{32}{5}$, и мнимая ось $2b=6$;

з) расстояние между директрисами, равное $\frac{8}{3}$, и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

и) уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами, равное $12\frac{4}{5}$.

4.144. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если известны:

а) ее мнимая полуось $a = 6$ и действительная полуось $b = 18$;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами, равное 48;

г) расстояние между директрисами, равное $7\frac{1}{7}$, и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами, равное $6\frac{2}{5}$.

4.145. Определить длины полуосей a и b для каждой из заданных гипербол:

а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $x^2 - 4y^2 = 16$; д) $4x^2 - 9y^2 = 25$;

б) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; г) $x^2 - y^2 = 1$; е) $25x^2 - 16y^2 = 1$.

4.146. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

4.147. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, ближайшего к этой директрисе.

4.148. Вычислить расстояние от принадлежащей гиперболе точки M с абсциссой, равной 13, до директрисы, ближайшей к ее фокусу $F(12; 0)$, если известно, что центром гиперболы является начало координат, а ее эксцентриситет ε равен 2.

4.149. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

4.150. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны:

а) ее точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$;

б) точка $M(-5; 3)$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) точка $M = \left(\frac{9}{2}; -1\right)$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;

г) точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ и уравнения директрис $y = \pm\frac{4}{3}x$;

д) уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{16}{5}$.

4.151. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

4.152. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

4.153. Доказать, что каждое из заданных уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

4.154. Выяснить, какие линии определяются заданными уравнениями:

а) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$; в) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;

б) $y = 7 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$; г) $x = 5\frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

4.155. Составить уравнение гиперболы, если известны:

а) расстояние между ее вершинами, равное 24, и ее фокусы $F_1(-10; 2)$, $F_2(16; 2)$;

б) ее фокусы $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ и расстояние между директрисами, равное 3,6;

в) угол между асимптотами, равный 90°, и фокусы $F_1(4; -4)$, $F_2(-2; 2)$.

4.156. Найти уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5; 0)$ и уравнение ближайшей к нему директрисы $5x - 16 = 0$.

4.157. Доказать, что нижеследующие уравнения определяют гиперболу, найти ее центр, полуоси, уравнения асимптот и изобразить их на плоскости:

а) $xy = 18$; б) $2xy - 9 = 0$; в) $2xy + 25 = 0$.

4.158. Определить, при каких значениях m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$:

а) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$;

б) касается ее;

в) не имеет с ней общих точек.

4.159. Установить условие, при котором прямая $y = kx + m$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.160. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных к прямой $4x + 3y - 7 = 0$.

4.161. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки $A(-1; -7)$.

4.162. Из точки $C(1; -10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$. Найти уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4.163. Из точки $P(1; -5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

4.164. Гипербола проходит через точку $A(\sqrt{6}; 3)$ и касается прямой $9x + 2y - 15 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

4.165. Составить уравнение гиперболы, которая касается двух прямых $5x - 6y - 16 = 0$ и $13x - 10y - 48 = 0$, если ее осями симметрии являются координатные оси.

4.166. Доказать, что точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и гиперболы $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ являются вершинами прямоугольника, и составить уравнения его сторон.

4.167. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если известны уравнение $15x + 16y - 36 = 0$ касательной к гиперболе и расстояние между ее вершинами, равное 8.

4.168. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она расположена:

а) в правой координатной полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее фокальный параметр $p = 3$;

б) в левой координатной полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее фокальный параметр $p = 0{,}5$;

в) в верхней координатной полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее фокальный параметр $p = \frac{1}{4}$;

г) в нижней координатной полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее фокальный параметр $p = 3$.

4.169. Определить величины фокальных параметров и построить графики следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$; в) $y^2 = -4x$; д) $y^2 = 4x - 8$; ж) $x^2 = 6y + 2$;
б) $x^2 = 5y$; г) $x^2 = -y$; е) $y^2 = 4 - 6x$; з) $x^2 = 2 - y$.

4.170. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она расположена симметрично относительно:

а) оси Ox и проходит через точку $A(9; 6)$;
б) оси Ox и проходит через точку $B(-1; 3)$;
в) оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$;
г) оси Oy и проходит через точку $D(4; -8)$.

4.171. Найти фокус F и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

4.172. Вычислить фокальный радиус точки M параболы, заданной уравнением $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

4.173. Доказать, что каждое из нижеследующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины и величину фокального параметра:

а) $x=2y^2 - 12y + 14$; б) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; в) $x = -y^2 + 2y - 1$.

4.174. Найти фокус параболы, если задана ее вершина $O'(6; -3)$ и уравнение директрисы $3x - 5y + 1 = 0$.

4.175. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая, заданная уравнением $y = kx + 2$:

а) пересекает параболу $y^2 = 4x$;
б) касается ее;
в) проходит вне этой параболы.

4.176. Найти уравнение прямой, которая параллельна прямой, заданной уравнением $3x - 2y + 30 = 0$, и касается параболы, заданной уравнением $y^2 = 12x$, и вычислить расстояние между касательной и заданной прямой.

4.177. Найти уравнения касательных, которые проведены из точки $A(2; 9)$ к параболе, заданной уравнением $y^2 = 36x$.

4.178. Из точки $A(5; 9)$ проведены прямые, касающиеся параболы, заданной уравнением $y^2 = 5x$. Найти уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4.179. Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота 6 м.

Раздел 4.6

4.180. Найти центр и радиус сфер:

а) $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 81$; б) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 72$.

4.181. Доказать, что следующие уравнения являются уравнениями сфер:

а) $x^2 + y^2 + 2y + z^2 + z - 1 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 43 = 0$.

4.182. Определить, какая линия является пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости:

а) $y = 1$; в) $y = 2$; д) $z = -\frac{1}{2}$.

б) $y = \frac{1}{2}$; г) $x = 0$;

4.183. Составить уравнение поверхности вращения эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Oy.

4.184. Составить уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси Ox. Изобразить поверхность на рисунке.

4.185. Составить уравнение поверхности вращения параболы $y^2 = 6z$ вокруг оси Oz. Изобразить поверхность на рисунке.

4.186. Определить, какие поверхности задаются уравнениями

а) $x^2 + y^2 = 25$; в) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; д) $y^2 = 7x$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; г) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

4.187. Составить уравнение конической поверхности, полученной вращением двух пересекающихся прямых $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$, $x = 0$, вокруг оси Oz.

4.188. Установить вид поверхности $14x = y^2 + z^2$ и построить ее изображение.

4.189. Определить, какая поверхность задана уравнением $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{15} - \frac{z^2}{10} = 1$, и установить, по какой линии она пересекается с плоскостью $z = 1$.

4.190. Определить, какая поверхность задана уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$, и установить, по какой линии она пересекается с плоскостью $z + 2 = 0$.

4.191. Определить, какая поверхность задана уравнением $x^2 + y^2 - 4z = 0$, и установить, по какой линии она пересекается с плоскостью $z - 2 = 0$.

Раздел 4.7

4.192. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;\ 1;\ -1)$ и имеет в качестве нормали вектор $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

4.193. Точка $P(2;\ -1;\ -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

4.194. Даны две точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$ и $M_2(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

4.195. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 4;\ -5)$ параллельно двум векторам $\vec{s}_1 = (3; 1; -1)$ и $\vec{s}_2 = (1; -2; 1)$.

4.196. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{s} = (3;\ -1; 4)$.

4.197. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$, $M_2(4;\ -1;\ -1)$, $M_3(2;\ 0;\ 2)$.

4.198. Для каждой из нижеследующих плоскостей найти одну из нормалей и определить с ее помощью координаты произвольной нормали:

а) $2x - y - 2z + 5 = 0$; в) $3x - 2y - 7 = 0$; д) $x + 2 = 0$;
б) $x + 5y - z = 0$; г) $5y - 3z = 0$; е) $y - 3 = 0$.

4.199. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;
б) $4x + y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;
в) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

4.200. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;
б) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;
в) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

4.201. Определить, при каких значениях параметров l и m нижеследующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

а) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;
б) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;
в) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

4.202. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

а) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;
б) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;
в) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

4.203. Найти двугранные углы, образованные пересечением нижеследующих пар плоскостей:

а) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

б) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

в) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

г) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

4.204. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4.205. Доказать, что три плоскости $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

4.206. Доказать, что три плоскости $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходят через одну прямую.

4.207. Доказать, что три плоскости $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

4.208. Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$:

а) имеют одну общую точку;

б) проходят через одну прямую;

в) пересекаются по трем различным параллельным прямым.

4.209. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку:

а) $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости Oxy;

б) $M_2(1; -2; 4)$ параллельно плоскости Oxz;

в) $M_3(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости Oyz.

4.210. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось:

а) Ox и точку $M_1(4; -1; 2)$;

б) Oy и точку $M_2(1; 4; -3)$;

в) Oz и точку $M_3(3; -4; 7)$.

4.211. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки:

а) $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox;

б) $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy;

в) $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz.

4.212. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ на координатных осях.

4.213. Вычислить площадь треугольника, стороны которого расположены на прямых, являющихся пересечениями координатных плоскостей с плоскостью, заданной уравнением $5x - 6y + 3z + 120 = 0$.

4.214. Вычислить объем пирамиды, порождаемой координатными плоскостями и плоскостью, заданной уравнением $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

4.215. Плоскость проходит через точку $M_1(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$, а на оси аппликат – отрезок $c = 2$. Составить уравнение этой плоскости в отрезках.

4.216. Плоскость проходит через точки $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(-3; 2; 1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Составить уравнение этой плоскости в отрезках.

4.217. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

4.218. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

4.219. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $M_1(4; 3; 2)$ и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

4.220. Составить уравнение плоскости, расположенной перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (-2; 1; 3)$ и отсекающей на оси Oz отрезок величиной $c = -5$.

4.221. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{s} = (2; 1; -1)$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки величиной $a = 3$ и $b = -2$ соответственно.

4.222. Составить уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ с координатными плоскостями.

4.223. Составить уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $E(3; 2; -5)$.

4.224. Найти точки пересечения прямой, заданной общими уравнениями $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$ с координатными плоскостями.

4.225. Определить, при каком значении D прямая, заданная общими уравнениями $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0, \end{cases}$ пересекает:

а) ось Ox; б) ось Oy; в) ось Oz.

4.226. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты общих уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z - D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна:

а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz.

4.227. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z - D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая:

а) пересекала ось абсцисс;
б) пересекала ось ординат;
в) пересекала ось аппликат;
г) совпадала с осью абсцисс;
д) совпадала с осью ординат;
е) совпадала с осью аппликат.

4.228. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a} = (2; -3; 5)$;
б) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
в) оси Ox;
г) оси Oy;
д) оси Oz.

4.229. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(3; 1; -1)$;
б) $M_1(3; -1; 0)$, $M_2(1; 0, -3)$;
в) $M_1(0; -2; 3)$, $M_2(3; -2; 1)$;
г) $M_1(1; 2; -4)$, $M_2(-1; 2; -4)$.

4.230. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно

а) вектору $\vec{a} = (2; -3; 4)$;
б) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{0}$;
в) прямой $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 2 + 5t. \end{cases}$

4.231. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $M_1(3; -1, 2)$, $M_2(2; 1; 1)$;
б) $M_1(1; 1; -2)$, $M_2(3; -1; 0)$;
в) $M_1(0; 0; 1)$, $M_2(0; 1; -2)$.

4.232. Определить точки пересечения прямой с координатными плоскостями, если ей принадлежат точки $M_1(-6; 6; -5)$ и $M_2(12; -6; 1)$.

4.233. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$, $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины C.

4.234. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

4.235. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A.

4.236. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

4.237. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; 3; -5)$ параллельно прямой, заданной уравнениями $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

4.238. Составить канонические уравнения прямых, заданных следующими общими уравнениями:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

4.239. Составить параметрические уравнения прямых, заданных следующими общими уравнениями:

а) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

4.240. Доказать параллельность прямых, заданных уравнениями:

а) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$, $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = 2 - t, \\ -7 + t, \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

4.241. Доказать перпендикулярность прямых, заданных уравнениями:

а) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$, $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 1 - 6t, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

4.242. Найти острый угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

4.243. Найти тупой угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=0, \\ z=3-t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=0, \\ z=-3+t. \end{cases}$

4.244. Определить косинус угла между прямыми, заданными общими уравнениями $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

4.245. Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=-3+2t, \\ y=-2+3t, \\ z=6-4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5+t, \\ y=-1+4t, \\ z=-4+t, \end{cases}$ пересекаются.

4.246. Выяснить, при каком значении a прямые, заданные каноническими уравнениями $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{a}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-7}{2}$, пересекаются.

4.247. Составить уравнения прямой, которая перпендикулярна вектору $\vec{a}=(6;\ -2;\ -3)$, проходит через точку $M_1(-1;\ 2;\ -3)$ и пересекает прямую, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

4.248. Составить уравнения прямой, которая пересекает две прямые, заданные каноническими уравнениями $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$, и проходит через точку $M_1(-4;\ -5;\ 3)$.

Раздел 4.8

Построить на плоскости множества решений нижеследующих систем линейных неравенств.

4.249. $\begin{cases} 2x_1-x_2\le 6, \\ x_1+4x_2\le 8, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$

4.250. $\begin{cases} x_1+3x_2\le 6, \\ 3x_1+x_2\le 6, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$

4.251. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.252. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.253. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.254. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.255. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.256. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.257. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.258. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.259. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$

4.260. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \ge -1. \end{cases}$

4.261. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ x_1 - 3x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 3. \end{cases}$

4.262. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

4.263. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \ge -10, \\ 3x_1 + 2x_2 \le -12, \\ x_1 + 2x_2 \ge -2, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$

4.264. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$

Контрольные задания к разделам 4.1–4.3

Вариант 1

1. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $N(2;-3)$ равно 5.
2. Определить площадь параллелограмма $ABCD$, если известны три его вершины $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$ и $C(-2; 1)$.
3. Определить, при каких значениях m и n две прямые, заданные уравнениями $mx + 4y + n = 0$ и $x + my - 1 = 0$:
   а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.
4. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны его вершина $B(2; 6)$ и уравнения $x - 7y + 15 = 0$ и $7x + y + 5 = 0$ соответственно высоты и биссектрисы, проведенных из одной вершины.
5. Известна точка $M(4; 3)$ прямой, отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 2

1. Известны площадь треугольника ABC, равная 4 кв. ед., две его вершины $A(2; 1)$ и $B(3; -2)$. Определить координаты вершины C, если известно, что она принадлежит оси Ox.
2. Определить, при каких значениях a и b две прямые, заданные уравнениями $ax - y - 1 = 0$ и $3x - 2y - b = 0$:
   а) имеют одну общую точку; б) параллельны; в) совпадают.
3. Определить угол φ, образованный двумя прямыми, заданными уравнениями $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ и $\sqrt{6}x - 3y + 3 = 0$.
4. На оси ординат найти точку P такую, что разность расстояний от нее до точек $M(-3; 2)$ и $N(2; 5)$ наибольшая.
5. Найти уравнения сторон треугольника ABC, если известна его вершина $C(4; 3)$ и заданы уравнения $x + 2y - 5 = 0$ и $4x + 13y - 10 = 0$ соответственно биссектрисы и медианы, проведенных из одной вершины.

Вариант 3

1. Выяснить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; -1)$ тупой угол.
2. Составить уравнение прямой, параллельной двум прямым, заданным уравнениями $3x - 2y - 1 = 0$ и $3x - 2y - 13 = 0$, и равноудаленной от них.

3. Определить, при каком значении m прямые $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ и $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.
4. Определить точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известны его вершины $A(-2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; -1)$, $D(3; -6)$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $P(2; 3)$ перпендикулярно отрезку PQ, где $Q(-1; 0)$.

Вариант 4

1. Найти вершины C и D параллелограмма $ABCD$, если известно, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс, его площадь равна 12 кв. ед. и заданы две другие вершины $A(-1; 3)$ и $B(-2; 4)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -3)$ параллельно прямой, заданной уравнением $3x - 7y + 3 = 0$.
3. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые, заданные уравнениями $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$;
4. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если известно, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $2x - y + 5 = 0$ и $2x - y + 10 = 0$, равна $\sqrt{10}$.
5. Составить уравнения прямых, на которых расположены стороны треугольника ABC, если известна его вершин $B(-4; -5)$ и заданы уравнения двух его высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить площадь квадрата, если известны две его противоположные вершины $P(3; 5)$ и $Q(1; -3)$.
2. Выяснить, при каких значениях m и n прямая, заданная уравнением $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$, параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, величина которого равна -3. Записать уравнение этой прямой.
3. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12 кв. ед.
4. На оси абсцисс найти точку P такую, что сумма расстояний от нее до точек $M(1; 2)$ и $N(3; 4)$ будет наименьшей.
5. Найти уравнения прямых, на которых расположены стороны треугольника ABC, если известны его вершина $B(2; -7)$ и уравнения $3x + y + 11 = 0$ высоты и $x + 2y + 7 = 0$ медианы, проведенных из различных вершин.

Вариант 6

1. Известна длина отрезка MN, равная 13; его начальная точка $M(3; -2)$ и его проекция на ось абсцисс, равная 12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат:
   а) острый угол; б) тупой угол.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; -1)$ под углом 30° к прямой, заданной уравнением $x + 2y + 3 = 0$.
3. Найти координаты вершины M_3 треугольника $M_1M_2M_3$, если его высоты пересекаются в точке $N(5; 2)$ и известны две другие его вершины $M_1(-10; 2)$ и $M_2(6; 4)$.
4. Известны уравнения $2x-3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ двух сторон прямоугольника и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
5. Найти площадь четырехугольника, если известны уравнения четырех прямых $x-2y+2=0$, $x-2y-10=0$, $x-4y-8=0$, $x-4y+8=0$, на которых расположены его стороны.

Вариант 7

1. Вычислить площадь квадрата $ABCD$, если известны две его смежные вершины $A(2; -5)$ и $B(-1; 3)$.
2. Точки $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 5)$ являются вершинами треугольника ABC. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.
3. Прямые, на которых расположены стороны треугольника, заданы уравнениями $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.
4. Вычислить угол φ, образованный прямыми, заданными уравнениями $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y-5=0$, $\left(3+\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)y+7-0$.
5. Точки $M_1(-1; 2)$ и $M_2(2; 3)$ принадлежат прямой. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 8

1. Найти вершину D параллелограмма $ABCD$, если известны три его вершины $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(0; 5)$.
2. Найти точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известны его вершины $A(-3; -1)$, $B(3; 9)$, $C(7; 6)$, $D(-2; -6)$.
3. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого от координатного угла прямой, заданной уравнением $3x - 4y - 12 = 0$.

4. Найти уравнения высот треугольника $M_1M_2M_3$, если известны его вершины $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$, $M_3(3; 2)$.
5. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$:
   а) имеют одну общую точку; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 9

1. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известна его вершина $C(4; -1)$ и уравнения $2x - 3y + 12 = 0$ высоты и $2x + 3y = 0$ медианы, проведенных из одной вершины.
2. Найти уравнения прямых, на которых расположены стороны квадрата, если известна одна его вершина $A(5; -1)$ и уравнение $4x - 3y - 7 = 0$ прямой, на которой лежит одна из его сторон.
3. Известны вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$. Найти уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов вершины A.
4. Определить угол φ, образованный двумя прямыми, заданными уравнениями $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$.
5. Известна точка $M(4; 3)$ прямой, отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 10

1. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.
2. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ двух биссектрис.
3. Известны две смежные вершины $A(2; 0)$, $B(-1; 4)$ квадрата $ABCD$. Найти уравнения прямых, на которых расположены его стороны.
4. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, если известна вершина $C(3; -1)$ его прямого угла и уравнение $3x - y + 2 = 0$ гипотенузы AB.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(2; 3)$ и отсекающей на координатных осях направленные от начала координат отрезки, величины которых равны.

ОТВЕТЫ

Глава 1

Тест. 1.1. 4. **1.2.** 3. **1.3.** 5. **1.4.** 2. **1.5.** 1. **2.1.** 1. **2.2.** 3. **2.3.** 1. **2.4.** 4. **2.5.** 2. **3.1.** 5. **3.2.** 3. **3.3.** 4. **3.4.** 5. **3.5.** 4. **4.1.** 1. **4.2.** 1. **4.3.** 3. **4.4.** 2. **4.5.** 1. **5.1.** 5. **5.2.** 4. **5.3.** 2. **5.4.** 1. **5.5.** 1. **6.1.** 1. **6.2.** 2. **6.3.** 3. **6.4.** 4. **6.5.** 2. **7.1.** 2. **7.2.** 1. **7.3.** 3. **7.4.** 5. **7.5.** 4. **8.1.** 3. **8.2.** 2, 3. **8.3.** 4. **8.4.** 5. **8.5.** 1. **9.1.** 3. **9.2.** 5. **9.3.** 2. **9.4.** 4. **9.5.** 1.

Задачи. 1.1. д) $(2, -1 \pm \sqrt{3}i)$; е) $(\pm 1 \pm i)$; ж) $(\pm 4 \pm i)$. **1.2.** а) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$; б) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$. **1.4.** а) $40 - 32i$; б) $7 + 19i$; в) 1. **1.5.** а) $8i$; б) -64; в) $117 + 44i$; г) $-i$, $\frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; д) $\pm i$, $\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$.

Глава 2

2.1. $AB = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$. **2.2.** а) не верно; б) не верно. **2.3.** $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$. **2.6.** а) 27; б) 20; в) 10; г) 20; д) 1; е) 5; ж) 4041. **2.7.** а) 1; б) 0; в) 100; г) 1; д) 6; е) 20; ж) 18. **2.8.** а) 160; б) 1; в) 512; г) 120; д) 3; е) -96; ж) 0. **2.9.** а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.11.** $\det A = 0$. **2.12.** $\operatorname{tr} ABC = 3$. **2.13.** а) $\det AB = 0$, $\operatorname{tr} AB = 11$; б) $\det AB = 0$, $\operatorname{tr} AB = -4$. **2.14**. б) $\alpha \in (-\infty; 3/2) \cup (3/2; +\infty)$. **2.20**. а) $r = 2$, $M = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$; б) $r = 2$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $r = 1$, $M = |2|$; г) $r = 2$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; д) $r = 1$, $M = |4|$;

е) $r = 3$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; ж) $r = 3$, $M = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 20 & 10 & -40 \\ 10 & -30 & 40 \end{vmatrix}$; з) $r = 3$, $M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.21. а) $r = 2$; б) $r = 3$; в) $r = 2$; г) $r = 2$; д) $r = 3$. **2.22.** $\lambda = 0{,}5$. **2.23.** а) $\lambda = 3$; б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$; в) при любом λ; г) $\lambda = \frac{7}{9}$. **2.24.** а) λ – любое; б) $\lambda \neq 2$; в) $\lambda \neq -17$; г) $\lambda \neq 0$. **2.25.** а) ни при каких λ; б) $\lambda = -3$; в) $\lambda \neq -3$. **2.26.** а) $\lambda = \frac{1}{2}$; б) $\lambda \neq \frac{1}{2}$; в) ни при каких λ. **2.27.** $r = 0$, если $\lambda = 0$; $r = 2$, если $\lambda \neq 0$. **2.28.** $r = 2$ при $\lambda = 0$; $r = 3$ при $\lambda \neq 0$. **2.29.** $r = 2$ при $\lambda = 3$; $r = 3$ при $\lambda \neq 3$. **2.30.** а) $r = 3$; б) $r = 2$. **2.31.** а) (2; 5; 0). **2.34.** а) (1; 2; –1); б) (1; 0; –1); в) (3; 7; –1); г) (5; –11; –13); д) (1; 1; 1); е) (1; 0; –1). **2.35.** а) $x = 3$, $y = -1$; б) $x = 1$, $y = 1$; в) $x = 1$, $y = -1$; г) (3; 1; 1); д) (1; 2; –1); е) (1; 0; 5); ж) (1; 0; –1); з) (–2; 2; 1); и) несовместна. **2.36.** а) если $m \neq 1$, $m \neq -3$, то $x = \frac{m-3}{m-1}$, $y = \frac{m+3}{1-m}$; если $m = 1$, то нет решений; если $m \neq 3$, то $y = 3 - 2x$, $x \in R$; б) если $m \neq 0$, $m \neq -1$, то $x = \frac{4+m-m^2}{m+1}$, $y = \frac{-m-2}{m+1}$; если $m = -1$, то нет решений; если $m = 0$, то $y = 2 - x$, $x \in R$. **2.37.** а) Несовместная; б) неопределенная; в) неопределенная; г) определенная; д) определенная; е) не определенная. **2.38.** а) Несовместна; б) $\left(\frac{5-7x_3}{5}; \frac{8x_3}{5}; x_3\right)$, где $x_3 \in R$; в) (1; 1; 1); г) $(11x_3 - 4,\ 3 - 7x_3,\ x_3)$, где $x_3 \in R$; д) (1; 1; 1); е) несовместна; ж) $\left(x_1; \frac{5x_1 - 7x_4 - 11}{10}\right), \left(\frac{-7-9x_4}{5}; x_4\right)$, где x_1, $x_4 \in R$; з) несовместна; и) $\left(x_1; x_2; \frac{3-5x_1+25x_2}{9}\right), \left(\frac{10x_2-2x_1}{3}\right)$, где x_1, $x_2 \in R$; к) $\left(\frac{9-x_3-14x_4-x_5}{7}; \frac{-1+4x_3-7x_4-3x_5}{7}; x_3; x_4; x_5\right)$, где $x_3, x_4, x_5 \in R$. **2.39.** а) $\lambda \neq 6$; б) ни при каком λ. **2.40.** $\lambda = -2$. **2.41.** $\left(\frac{18-15x_2}{10}; x_2; \frac{-7}{5}\right)$, где $x_2 \in R$. **2.42.** $\left(\frac{7-x_3}{3}; \frac{4+2x_3}{3}; x_3\right)$, где $x_3 \in R$. **2.43.** $\left(2x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}; x_4\right)$, где $x_2, x_4 \in R$. **2.44.** $(x_3 + x_4 + 5, 2x_3 + x_4 - 1; x_3; x_4)$, где x_3, x_4 – любые числа. **2.45.** (–2; 3). **2.46.** $\left(-x_3 + \frac{1}{2}x_4; x_3 - 2x_4 + 1; x_3; x_4\right)$, где x_3, x_4 – любые числа. **2.47.** (1; 1; 1). **2.48.** (1; 1; 0). **2.49.** (0; 1; 1). **2.50.** (1; 1; 1). **2.51.** Несовместна. **2.52.** (1; 0; 0; 0). **2.53.** $\left(x_1; 2x_1 - \frac{5}{8}x_4 - 2; 1 + \frac{17}{8}x_4; x_4\right)$, где x_1, x_2 – любые числа. **2.54.** Несовместна. **2.55.** $(x_1; x_2; -3x_1 - 4x_2 + 1; 1)$, где x_1, x_2 – любые числа. **2.56.** Несовместна. **2.57.** Несовместна. **2.58.** $(x_1; x_2; 13; -3x_1 - 2x_2 + 19; -34)$,

где x_1, x_2 – любые числа. **2.59.** $(-3{,}75 - 2x_2 - 0{,}5x_5; x_2; 0{,}5x_5 - 0{,}75; x_5 - 5; x_5)$, где x_2, x_5 – любые числа. **2.60.** (3; 0; –5; 11). **2.61.** а) При $\lambda \neq 0$ система несовместна, при $\lambda = 0$ она совместна и имеет общее решение $\left(-\frac{5}{2}x_3 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{3}{2}; -\frac{7}{2}x_3 - \frac{19}{2}x_4 - \frac{7}{2}; x_3; x_4\right)$, где x_3, x_4 – любые числа; б) при $\lambda = 1$ система несовместна, при $\lambda \neq 1$ система совместна и имеет общее решение $x_1 = 1 - \frac{9}{2}x_2 - \frac{10}{\lambda - 1}$, $x_2 \in R$, $x_3 = 4x_2 + \frac{5}{\lambda - 1}$, $x_4 = \frac{5}{\lambda - 1}$. **2.62.** $(x_3; -2x_3; x_3)$, x_3 – любое число. **2.63.** (0, 0, 0). **2.64.** $(x_1, x_2, 4x_2 - 3x_1; 0)$, $x_1, x_2 \in R$. **2.65.** $(-1/3x_3; 4/3x_3; x_3; 0)$ $x_3 \in R$. **2.66.** $(5/7x_3; 11/7x_3; x_3)$, $x_3 \in R$. **2.67.** $(0, 2x_4; x_2 = 0; -0{,}8x_4; x_4)$, $x_4 \in R$. **2.68.** (0, 0, 0). **2.69.** $(-4x_2 - 8x_3; x_2; x_3; 3x_2 + 5x_3)$, где $x_2, x_3 \in R$. **2.70.** Не существует. **2.71.** Существует. **2.72.** Не существует. **2.73.** Не существует. **2.74.** $\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$. **2.75.** $\{(1, 0, 3, 1, 0), (2, 1, 0, 0, 0), (1/3, 0, -4/3, 0, 1)\}$. **2.76.** $\{(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$. **2.77.** $(-3x_4; x_4; -6x_4; x_4)$, $x_4 \in R$, при $x_4 = 1$: $(-3{,}1; -6{,}1)$.

2.78. Да. **2.79.** Нет. **2.80.** Да. **2.81.** Нет. **2.82.** Нет. **2.83.** Да. **2.84.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

2.85. $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 \\ 5 & 15 & -20 \\ 4 & 12 & -15 \end{pmatrix}$. **2.86.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **2.87.** $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. **2.88.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$; $\mathbf{X}^{(1)} = (t, -t)$, $\mathbf{X}^{(2)} = (t, t)$, $t \neq 0$. **2.89.** $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$; $\mathbf{X}^{(1)} = (t, t)$, $\mathbf{X}^{(2)} = (4t, -5t)$, $t \neq 0$. **2.90.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\mathbf{X} = (3t, t, t)$, $t \neq 0$. **2.91.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$; $\mathbf{X}^{(1)} = (t, t, t)$, $\mathbf{X}^{(2)} = (0; 0; t)$, $\mathbf{X}^{(3)} = (t, 3t, t)$, $t \neq 0$. **2.92.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\mathbf{X}^{(1)} = (3t, 5t, 6t)$, $t \neq 0$; $\mathbf{X}^{(2)} = (2; 1; 0)t_1 + (1; 0; -1)t_2$, где t_1, t_2 не равны нулю одновременно. **2.93.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $\mathbf{X} = (1; 2; 0)t_1 + (0; 0; 1)t_2$, где t_1, t_2 не равны нулю одновременно.

Глава 3

3.2. а) $\overrightarrow{CB} = -3\vec{q}$; $\overrightarrow{CB} = -4\vec{p}$; $\overrightarrow{AC} = 4\vec{p} + 3\vec{q}$; б) $\overrightarrow{AM} = 4\vec{p} + 1{,}5\vec{q}$; $\overrightarrow{AN} = 3\vec{q} + 2\vec{p}$; $\overrightarrow{MN} = 1{,}5\vec{q} - 2\vec{p}$. **3.3.** а) $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{n})$; б) $\vec{m} = 2\vec{p} - \vec{n}$. **3.4.** $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\vec{m} + \vec{n})$. **3.5.** $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\vec{n} - \vec{m}$. **3.6.** $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{3}\vec{m} - \frac{1}{3}\vec{n}$; $\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{m} - \frac{1}{3}\vec{n}$; $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m}$. **3.7.** $\overrightarrow{AC_1} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$; $\overrightarrow{A_1C} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$; $\overrightarrow{BD_1} = \vec{n} - \vec{m} + \vec{p}$; $\overrightarrow{B_1D} = \vec{n} - \vec{m} - \vec{p}$. **3.8.** $\overrightarrow{OA_1} = -\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$; $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$; $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$; $\overrightarrow{OD_1} = -\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$. **3.9.** $z = 6$. **3.11.** $C(10; 4)$. **3.12.** $C(7; -2)$. **3.13.** $x = \pm 6$. **3.14.** 7; $\sqrt{69}$. **3.15.** 7. **3.16.** (4; 6; –2); (6; 9; –3). **3.17.** 5. **3.18.** $B(11; 3; -15)$.

3.19. а) $\vec{a}=-20\vec{m}+11\vec{n}$; б) $\vec{a}=6\vec{m}-7\vec{n}$. **3.20.** а) $\vec{a}=-2\vec{m}+4\vec{n}+\vec{p}$; б) $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p}$. **3.21.** $|\overrightarrow{OM}|=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos\beta=\frac{-3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.22.** $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=2$, $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}=$ $=-6$, $\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB}=3$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{-6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{3}{7}$. **3.23.** $\vec{a}=4\vec{i}-2\sqrt{2}\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}$.

3.24. а) 120°; б) $(1;-1;\sqrt{2})$. **3.25.** (2; 2; 2). **3.26.** 10. **3.27.** а) 3; б) −10; в) $2\sqrt{7}$. **3.28.** 5. **3.29.** 3. **3.30.** $7\sqrt{3}$. **3.31.** $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$. **3.32.** 60°. **3.33.** 45°. **3.34.** 120°. **3.35.** 60°. **3.36.** $\arccos 0{,}8$. **3.37.** $\arccos\frac{5}{6}$. **3.38.** $\frac{-4}{7}$. **3.39.** $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$; $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **3.40.** $\sqrt{3}$. **3.41.** 2. **3.42.** $\left(\frac{5}{13};-\frac{12}{13};0\right)$. **3.43.** $\left(-\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right)$. **3.44.** $(2\alpha;\ 3\alpha;\ \alpha)$, $\alpha\in R$. **3.45.** 10; 20. **3.46.** 6. **3.47.** а) $\vec{c}=-6\vec{j}$; б) $\vec{c}=-2\vec{k}$; в) $\vec{c}=6\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}$. **3.48.** $\sqrt{21}$. **3.50.** 2,5. **3.51.** $50\sqrt{2}$. **3.52.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **3.53.** $\frac{14}{\sqrt{21}}$. **3.54.** $\sqrt{26}$. **3.55.** −8. **3.56.** а) Да; б) нет, левая; в) нет, левая. **3.57.** 14. **3.58.** а) Да; б) нет. **3.59.** 6. **3.60.** $2\frac{2}{3}$. **3.61.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **3.62.** $2V$. **3.63.** $\vec{c}=(11/7;-1/7)$. **3.64.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да. **3.65.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет. **3.66.** а) $\vec{x}_1(1)$; $\vec{x}_2(-2)$; $\vec{x}_3(3)$; б) $\vec{x}_1(1;0)$; $\vec{x}_2(0;1)$; $\vec{x}_3(3;-2)$; $\vec{x}_4(2;1)$; в) $\vec{x}_1(1;0;0)$; $\vec{x}_2(0;1;0)$; $\vec{x}_3(1;-2;0)$; $\vec{x}_4(0;0;1)$; г) $\vec{x}_1(1;0;0)$; $\vec{x}_2(0;1;0)$; $\vec{x}_3(0;0;1)$; $\vec{x}_4(-2;1;3)$; д) $\vec{x}_1(1;0;0)$; $\vec{x}_2(0;1;0)$; $\vec{x}_3(0;0;1)$; $\vec{x}_4(-1;0;1)$. **3.67.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **3.68.** а) $\lambda\neq 0$; б) $\lambda\neq 0$; в) ни при каких λ. **3.69.** Да. **3.70.** $\alpha\neq -8$, $\beta\neq 3$. **3.71.** а) Да; б) нет. **3.72.** $|\vec{F}|=4$, $\alpha=45°$, $\beta=120°$, $\gamma=60°$. **3.73.** $x=-3$, $y=-3$, $z=3\sqrt{2}$. **3.74.** 32. **3.75.** 19. **3.76.** 1) $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=(2;3;4)$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(6;-6;-3)$, $|[\vec{a},\vec{F}]|=45$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$; 2) $\vec{F}=(2;3;4)$, $\vec{a}=\overrightarrow{BA}=(1;2;2)$, $|[\vec{a},\vec{F}]|=\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **3.77.** 15, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. **3.78.** 2. **3.79.** 100.

Глава 4

4.1. а) $X=-6$, $Y=6\sqrt{3}$; б) $X=3\sqrt{3}$, $Y=-3$; в) $X=\sqrt{2}$, $Y=-\sqrt{2}$. **4.2.** а) $d=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}$; б) $d=6$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$; в) $d=4$, $\theta=\frac{5}{6}\pi$. **4.3.** а) $d=\sqrt{2}$, $\theta=-\frac{3}{4}\pi$; б) $d=5$, $\theta=\text{arctg}\frac{4}{3}-\pi$; в) $d=13$, $\theta=\pi-\text{arctg}\frac{12}{5}$; г) $d=\sqrt{234}$, $\theta=-\text{arctg}\,5$. **4.4.** а) 3; б) −3. **4.5.** а) (−15; −12); б) (1; −12). **4.6.** −2. **4.7.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$. **4.8.** а) −5; б) 5. **4.9.** а) 5; б) 10; в) 5; г) $\sqrt{5}$; д) $2\sqrt{2}$; е) 13. **4.10.** 137 кв. ед. **4.11.** $8\sqrt{3}$ кв. ед. **4.12.** 13, 15. **4.13.** 150 кв. ед. **4.14.** $4\sqrt{2}$.

4.19. $\angle BAC = 45°$, $\angle ABC = 45°$, $\angle ACB = 90°$. **4.20.** 60°. Указание. Вычислить длины сторон треугольника, а затем применить теорему косинусов. **4.21.** $M_1(0; 28)$ и $M_2(0; -2)$. **4.22.** $P_1(1; 0)$ и $P_2(6; 0)$. **4.23.** $M_2(3; 0)$. **4.24.** $B(0; 4)$ и $D(-1; -3)$. **4.25.** Условию задачи удовлетворяют два квадрата, симметрично расположенных относительно стороны AB. Вершины одного квадрата суть точки $C_1(-5; 0)$, $D_1(-2; -4)$, вершины другого – $C_2(3; 6)$, $D_2(6; 2)$. **4.26.** а) $M(1; 3)$; б) $N(4; -3)$. **4.27.** (1; –3), (3; 1) и (–5; 7). **4.28.** $D(-3; 1)$. **4.29.** (5; –3), (1; –5). **4.30.** 13. **4.31.** (2; –1) и (3; 1). **4.32.** $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$. **4.33.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **4.34.** (–11; –3). **4.35.** 4. **4.36.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2; \lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3; \lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$. **4.37.** $A(3; -1)$ и $B(0, 8)$. **4.38.** а) 14 кв. ед.; б) 12 кв. ед.; в) 25 кв. ед. **4.39.** 5. **4.40.** 20 кв. ед. **4.41.** 7,4. **4.42.** $x = -\frac{6}{11}$, $y = 4\frac{1}{11}$. **4.43.** (0; –8) или (0; –2). **4.44.** (3; –5). **4.45.** $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$. **4.46.** (1; –3), (–2; 5), (5; –9) и (8; –17). **4.47.** $S = 17$ кв. ед. **4.48.** $C_1(-1; 4)$ или $C_2\left(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7}\right)$. **4.49.** 1) $2x - 3y + 9 = 0$; 2) $3x - y = 0$; 3) $y + 2 = 0$; 4) $3x + 4y - 12 = 0$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) $x + 3y - 2 = 0$. **4.50.** 1) $k = 5$, $b = 3$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; 3) $k = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$; 4) $k = -\frac{3}{2}$, $b = 0$; 5) $k = 0$, $b = 3$. **4.51.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **4.52.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **4.53.** (2; 1), (4; 2), (–1; 7), (1; 8). **4.54.** (–2; –1). **4.55.** $Q(11; -11)$. **4.56.** 1) $5x + y - 7 = 0$; 2) $8x + 12y + 5 = 0$; 3) $5x + 7y + 9 = 0$; 4) $6x - 30y - 7 = 0$. **4.57.** а) $k = 7$; б) $k = \frac{7}{10}$; в) $k = -\frac{3}{2}$. **4.58.** $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. **4.59.** $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$. **4.60.** $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **4.61.** $x + y + 1 = 0$. **4.62.** (3; 4). **4.63.** $x - 5 = 0$. **4.64.** Уравнение стороны AB: $2x + y - 8 = 0$; BC: $x + 2y - 1 = 0$; CA: $x - y - 1 = 0$. Уравнение медианы, проведенной из вершины A: $x - 3 = 0$; из вершины B: $x + y - 3 = 0$; из вершины C: $y = 0$. **4.65.** $3x - 5y + 4 = 0$; $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$; $x + 7y + 10 = 0$. **4.66.** $x - 2y - 6 = 0$, $2x + y - 7 = 0$. **4.67.** $3x + y - 14 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$, $x + 2y - 14 = 0$. **4.68.** $7x + y + 18 = 0$, $11x - 2y + 14 = 0$. **4.69.** Уравнения сторон прямоугольника: $2x - 5y + 3 = 0$, $2x - 5y - 26 = 0$; уравнение его диагонали: $7x - 3y - 33 = 0$. **4.70.** $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$. Указание. Условию задачи удовлетворяют две прямые: одна из них проходит через точку P и середину отрезка, соединяющего точки A и B; другая проходит через точку P параллельно отрезку AB. **4.71.** $M_1(10; -5)$. **4.72.** Уравнение сторон квадрата: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; уравнение его второй диагонали: $x + 7y - 31 = 0$. **4.73.** $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **4.74.** $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$. **4.76.** 49. **4.77.** 1) $2x - 3y - 13 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $y + 3 = 0$. **4.78.** 1) (5; 6); 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$;

3) $\left(2; -\frac{1}{11}\right)$; 4) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$. **4.81.** 1) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$; 3) $m = 0$, где n – любое значение. **4.82.** $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. **4.83.** BC: $3x + 4y - 22 = 0$; CA: $2x - 7y - 5 = 0$; CN: $3x + 5y - 23 = 0$. **4.84.** $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$. Указание. Задача может быть решена по следующей схеме: 1. Устанавливаем, что вершина A не лежит ни на одной из данных прямых. 2. Находим точку пересечения медиан и обозначаем ее какой-нибудь буквой, например M. Зная вершину A и точку M, мы можем составить уравнение третьей медианы. 3. На прямой, проходящей через точки A и M, строим отрезок $MD = AM$. Затем определяем координаты точки D, зная точку M – середину отрезка AD и один из его концов A. 4. Устанавливаем, что четырехугольник $BDCM$ – параллелограмм (его диагонали взаимно делятся пополам), составляем уравнения прямых DB и DC. 5. Вычисляем координаты точек B и C. 6. Зная координаты всех вершин треугольника, мы можем составить уравнения его сторон. **4.85.** $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **4.86.** $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **4.87.** $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. **4.88.** $P(2; -1)$. **4.89.** $P(2; 5)$. **4.90.** $x - 5y + 3 = 0$ или $5x + y - 11 = 0$. **4.91.** $8x - y - 24 = 0$. **4.92.** $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$. **4.93.** $m = \frac{7}{12}$. **4.94.** $a = -7$. **4.95.** 1) $a = -2$; $5y - 33 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$. **4.96.** $m = -4$, $n = 2$; $x - 5 = 0$. **4.100.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 8) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 9) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ или $\frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 10) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **4.101.** 1) 4 и 3; 2) 2 и 1; 3) 5 и 1; 4) $\sqrt{15}$ и $\sqrt{3}$; 5) $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$. **4.102.** 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm\frac{25}{4}$. **4.103.** Точки A_1 и A_6 лежат на эллипсе; A_2, A_4 и A_8 – внутри эллипса; A_3, A_5, A_7, A_9 и A_{10} – вне эллипса. **4.104.** 20. **4.105.** 10. **4.106.** $\left(-5; 3\sqrt{3}\right)$ и $\left(-5; -3\sqrt{3}\right)$. **4.107.** 1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$; 4) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$; 6) $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$; 7) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. **4.108.** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$. **4.109.** $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. **4.110.** 16 кв. ед. **4.111.** 1) $C(3; -1)$, полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$; уравнения директрис: $2x - 15 = 0$, $2y + 3 = 0$; 2) $C(-1; 2)$, полуоси 5 и 4, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; уравнения директрис: $3x - 22 = 0$; $3x + 28 = 0$; 3) $C(1; -2)$, полуоси $2\sqrt{3}$

и 4, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. **4.113.** 1) При $|m| < 5$ – пересекает эллипс; 2) при $m = \pm 5$ – касается эллипса; 3) при $|m| > 5$ – проходит вне эллипса. **4.114.** $3x + 2y - 10 = 0$ и $3x + 2y + 10 = 0$. **4.115.** $x + y - 5 = 0$ и $x + y + 5 = 0$. **4.116.** $M1(-3; 2)$; $d = \sqrt{13}$. **4.117**. $x + y - 5 = 0$ и $x + 4y - 10 = 0$. **4.118**. $4x - 5y - 10 = 0$. **4.119**. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ или $\frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1$. **4.120**. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$. **4.121**. $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$. **4.122**. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. **4.123**. (3; 2) и (3; –2). **4.124**. 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; 3) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$; 4) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; 5) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; 6) $x^2 + y^2 = 16$; 7) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; 8) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$; 9) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; 10) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **4.126.** $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$ и $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 0$. **4.127.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. **4.128.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ и $\left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}$. **4.129.**Уравнения 1), 2), 4), 5), 8) и 10) определяют окружности; 1) $C(5; -2)$, $R = 5$; 2) $C(-2; 0)$, $R = 8$; 3) уравнение определяет единственную точку (5; –2); 4) $C(0; 5)$, $R = \sqrt{5}$; 5) $C(1; -2)$, $R = 5$; 6) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 7) уравнение определяет единственную точку (–2; 1); 8) $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $R = \frac{1}{2}$; 9) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 10) $C\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$. **4.131.** $2x - 5y + 19 = 0$. **4.132.** 1) $|k| < \frac{3}{4}$; 2) $k = \pm\frac{3}{4}$; 3) $|k| > \frac{3}{4}$. **4.133.** $\frac{b^2}{1+k^2} = R^2$. **4.134.** $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$. **4.135.** $x_1x + y_1y = R^2$. **4.136.** 90°. **4.137.** $x + 2y + 5 = 0$. **4.138.** $d = 7{,}5$. **4.139.** 3. **4.140.** $2x + y - 1 = 0$ и $2x + y + 19 = 0$. **4.141.** 45°. **4.142.** 90°. **4.143.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 9) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **4.144.** 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = -1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; 3) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$; 4) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$; 5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. **4.145.** 1) $a = 3$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $b = 1$; 3) $a = 4$, $b = 2$; 4) $a = 1$, $b = 1$; 5) $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{3}$; 6) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}$. **4.146.** 12 кв. ед. **4.147.** 12. **4.148.** 10. **4.149.** $\left(-6; 4\sqrt{3}\right)$

и $\left(-6;-4\sqrt{3}\right)$. **4.150.** 1) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$; 2) $x^2-y^2=16$; 3) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$; 4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ или $\frac{x^2}{61/9}-\frac{y^2}{305/16}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **4.151.** $\varepsilon=\sqrt{2}$. **4.152.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$. **4.153.** 1) C (2; –3), $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=5/3$, уравнения директрис: $5x-1=0$, $5x-19=0$, уравнения асимптот: $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$; 2) $C(-5;1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=1{,}25$; уравнения директрис: $x=-11{,}4$ и $x=1{,}4$, уравнения асимптот: $3x+4y+11=0$ и $3x-4y+19=0$; 3) $C(2;-1)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=1{,}25$, уравнения директрис: $y=-4{,}2$, $y=2{,}2$, уравнения асимптот: $4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$. **4.155.** 1) $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$; 2) $24xy+7y^2-$ $-144=0$; 3) $2xy+2x-2y+7=0$. **4.156.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **4.157.** 1) $C(0;0)$, $a=b=6$, уравнения асимптот: $x=0$ и $y=0$; 2) $C(0;0)$, $a=b=3$, уравнения асимптот: $x=0$ и $y=0$; 3) $C(0;0)$, $a=b=5$, уравнения асимптот: $x=0$ и $y=0$. **4.158.** 1) При $|m|>4{,}5$ пересекает гиперболу; 2) при $m=\pm 4{,}5$ касается гиперболы; 3) при $|m|<4{,}5$ проходит вне гиперболы. **4.159.** $k^2a^2-b^2=m^2$. **4.160.** $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$. **4.161.** $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$. **4.162.** $2x+5y-16=0$. **4.163.** $d=\frac{17}{10}\sqrt{10}$. **4.164.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$, $\frac{3x^2}{10}-\frac{4y^2}{45}=1$. **4.165.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. **4.166.** $x=-4$, $x=4$, $y=-1$, $y=1$. **4.167.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **4.168.** 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=\frac{1}{2}y$; 4) $x^2=-6y$. **4.169.** 1) $p=3$; в правой полуплоскости симметрично оси Ox; 2) $p=2{,}5$; в верхней полуплоскости симметрично оси Oy; 3) $p=2$; в левой полуплоскости симметрично оси Ox; 4) $p=\frac{1}{2}$; в нижней полуплоскости симметрично оси Oy. **4.170.** 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=-9x$; 3) $x^2=y$; 4) $x^2=-2y$. **4.171.** $F(6;0)$, $x+6=0$. **4.172.** 12. **4.173.** 1) $A(-4;3)$, $p=\frac{1}{4}$; 2) $A(1;2)$, $p=2$; 3) $A(0;1)$, $p=\frac{1}{2}$. **4.174.** $F(9;-8)$. **4.175.** 1) $k<\frac{1}{2}$; 2) $k=\frac{1}{2}$; 3) $k>\frac{1}{2}$. **4.176.** $d=2\sqrt{13}$. **4.177.** $3x-y+3=0$ и $3x-2y+12=0$. **4.178.** $5x-18y+25=0$. **4.179.** $p=12$. **4.180.** а) $O(0;1;-3)$, $R=9$; б) $O(2;-4;1)$, $R=6\sqrt{2}$. **4.182.** а) точка; б) окружность; в) пустое множество; г) окружность; д) окружность. **4.183.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. **4.184.** Двуполостный гиперболоид, $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=-1$. **4.185.** Однополостный параболоид, $z=\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{6}$. **4.186.** а) Круговой цилиндр; б) сфера; в) эллиптический цилиндр; г) двуполостный гиперболоид; д) параболический цилиндр. **4.187.** Конус, $z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}$. **4.188.** Параболоид вращения. **4.189.** Двуполостный гиперболоид,

гипербола. **4.190.** Однополостный гиперболоид, пара прямых. **4.191.** Параболоид вращения, парабола. **4.192.** $x-2y+3z+3=0$. **4.193.** $2x-y-z-6=0$. **4.194.** $x-y-3z+2=0$. **4.195.** $x+4y+7z+16=0$. **4.196.** $x-y-z=0$. **4.197.** $3x+$ $+3y+z-8=0$. **4.198.** 1) $\vec{n}=\{2;-1;-2\}$, $\vec{n}=\{2\lambda;-\lambda;-2\lambda\}$; 2) $\vec{n}=\{1;5;-1\}$, $\vec{n}=\{\lambda;5\lambda;-\lambda\}$; 3) $\vec{n}=\{3;-2;0\}$, $\vec{n}=\{3\lambda;-2\lambda;0\}$; 4) $\vec{n}=\{0;5;-3\}$, $\vec{n}=\{0;5\lambda;-3\lambda\}$; 5) $\vec{n}=\{1;0;0\}$, $\vec{n}=\{\lambda;0;0\}$. 6) $\vec{n}=\{0;1;0\}$, $\vec{n}=\{0;\lambda;0\}$. **4.199.** 1) и 3). **4.200.** 1) и 2). **4.201.** 1) $l=3, m=-4$; 2) $l=3,\ m=-\frac{2}{3}$; 3) $l=-3\frac{1}{3},\ m=-1\frac{1}{5}$. **4.202.** 1) 6; 2) –19; 3) $-\frac{1}{7}$. **4.203.** 1) $\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ и $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos\frac{2}{15}$ и $\pi-\arccos\frac{2}{15}$. **4.204.** $4x-y-$ $-2z-9=0$. **4.205.** $x=1$; $y=-2$; $z=2$. **4.208.** 1) $a\neq 7$; 2) $a=7$, $b=3$; 3) $a=7$, $b\neq 3$. **4.209.** 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$. **4.210.** 1) $2y+z=0$; 2) $3x+z=0$; 3) $4x+3y=0$. **4.211.** 1) $y+4z+10=0$; 2) $x-z-1=0$; 3) $5x+y-13=0$. **4.212.** $a=-4$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$. **4.213.** 240 кв. ед. **4.214.** 8 куб. ед. **4.215.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$. **4.216.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1$. **4.217.** $x+y+z+5=0$. **4.218.** $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-2z+12=0$. **4.219.** $x+y+$ $+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$. **4.220.** $2x-y-3z-15=0$. **4.221.** $2x-3y+z-6=0$. **4.222.** $\begin{cases}5x-7y-3=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x+2z-3=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}7y-2z+3=0,\\ x=0.\end{cases}$ **4.223.** $\begin{cases}3x-y-7z+9=0,\\ 5x+2z=0.\end{cases}$ **4.224.** (2; –1; 0); $\left(1\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$; (0; 2; –1). **4.225.** 1) $D=-4$; 2) $D=9$; 3) $D=3$. **4.226.** 1) $A_1=A_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля; 2) $B_1=B_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1 , D_2 отлично от нуля; 3) $C_1=C_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля. **4.227.** 1) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 2) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 4) $A_1=D_1=0$, $A_2=D_2=0$; 5) $B_1=D_1=0$, $B_2=D_2=0$; 6) $C_1=D_1=0$, $C_2=D_2=0$. **4.228.** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$. **4.229.** 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$. **4.230.** 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=4t-1$, $z=-3$; 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. **4.231.** 1) $x=t+2$, $y=-2t+1$, $z=t+1$; 2) $x=t+3$, $y=-t-1$, $z=t$; 3) $x=0$, $y=t$, $z=-3t+1$. **4.232.** (9; –4; 0), (3; 0; –2), (0; 2; –3). **4.233.** $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$. **4.234.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$. **4.235.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$.

4.236. $x = 3t + 3$, $y = 15t + 1$, $z = 19t - 3$. **4.237.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. **4.238.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. Р е ш е н и е. Полагая, например, $z_0 = 0$, находим из данной системы: $x_0 = 2$, $y_0 = -1$; таким образом, мы уже знаем одну точку прямой; $M_0(2; -1; 0)$. Теперь найдем направляющий вектор. Имеем $n_1 = \{1; -2; 3\}$, $n_2 = \{3; 2; -5\}$; отсюда $a = [n_1, n_2] = \{4;\ 14;\ 8\}$, т. е. $l = 4$, $m = 14$, $n = 8$. Канонические уравнения данной прямой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0 и l, m, n в равенства $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ или $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$.

4.239. 1) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 3$; 2) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$. **4.242.** 60°.

4.243. 135°. **4.244.** $\cos\varphi = \pm\frac{4}{21}$. **4.246.** $a = 3$. **4.247.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

4.248. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Батунер, Л. М. Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. – Л. : Химия, 1971. – 823 с.
2. Воеводин, В. В. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / В. В. Воеводин. – М. : Наука, 1975. – 176 с.
3. Вольвачев, Р. Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р. Т. Вольвачев, А. А. Гусак. – Минск : Университетское, 1986. – 112 с.
4. Высшая математика. Общий курс / под общ. ред. С. А. Самаля. – Минск : Выш. шк., 2000. – 351 с.
5. Высшая математика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Г. Л. Луканин [и др.]; под ред. Г. Н. Яковлева. – М. : Просвещение, 1988. – 431 с.
6. Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. для студентов вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – Т. 1. – 544 с.
7. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : в 2 ч. / А. А. Гусак. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 1988. – Ч. 1. – 256 с.
8. Гусак, А. А. Высшая математика. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
9. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 1999. – 288 с.
10. Коваленко, Н. С. Высшая математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учеб. пособие для экон. и инженер. специальностей вузов / Н. С. Коваленко, Т. И. Чепелева. – Минск : Юнипресс, 2006. – 208 с.
11. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач : в 2 ч. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ч. 1. – М. : Физматлит, 2014. – 216 с.
12. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2010. – Ч. 1. – 288 с.
13. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – Ч. 1.
14. Скатецкий, В. Г. Высшая математика : для студентов хим. специальностей / В. Г. Скатецкий. – Минск : БГУ, 2002. – 88 с.
15. Скатецкий, В. Г. Математическое моделирование физико-химических процессов / В. Г. Скатецкий, Д. В. Свиридов, В. И. Яшкин. – Минск : БГУ, 2003. – 293 с.
16. Скатецкий, В. Г. Математические методы в химии / В. Г. Скатецкий, Д. В. Свиридов, В. И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ 5

1.1. Множества, операции над множествами 5
1.1.1. Операция объединения множеств 6
1.1.2. Логические переменные. Таблица истинности 7
1.1.3. Операция пересечения множеств 8
1.1.4. Операция дополнения множеств 9
1.1.5. Операция разности множеств 10
1.1.6. Операция симметрической разности множеств 11
1.1.7. Операция эквивалентности множеств 11
1.1.8. Операция импликации множеств 12
1.1.9. Основные законы теоретико-множественных и логических операций 13

1.2. Основные числовые множества 14
1.2.1. Аксиомы Пеано 15
1.2.2. Множество комплексных чисел 16
1.2.3. Применение комплексных чисел в расчете физических величин 20

1.3. Основные формулы комбинаторики 21
1.3.1. Перестановки с повторениями 23
1.3.2. Размещения с повторениями 24
1.3.3. Связь перестановок с повторением и сочетаний 29

Тест 29

Задачи для самостоятельного решения 34

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 36

2.1. Матрицы и операции над ними 36
2.1.1. Виды матриц 37
2.1.2. Действия над матрицами 39

2.2. Определитель матрицы 41
2.3. Обратная матрица 49
2.4. Ранг матрицы 53
2.5. Системы линейных уравнений 56
2.6. Системы линейных однородных уравнений 69
2.7. Линейные операторы. Матрица линейного оператора 73
2.8. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора 77
2.9. Применение методов линейной алгебры в химии 82
2.9.1. Элементы теории графов в химии 82
2.9.2. Модель планирования эксперимента 86
2.9.3. Анализ размерностей 86
2.9.4. Расчет смесей сложного состава 89
2.9.5. Определение состава смеси по данным спектрофотометрических измерений 91
2.9.6. Исследование состава смеси при помощи системы химических сенсоров 93
Задачи для самостоятельного решения 95
Контрольные задания 108

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ 115
3.1. Векторы на плоскости и в пространстве 115
3.1.1. Операции над векторами 116
3.1.2. Линейные комбинации и базисы множеств векторов 118
3.1.3. Системы координат 120
3.2. Проекция вектора. Скалярное произведение векторов 123
3.3. Векторное и смешанное произведения векторов 127
3.4. Понятие векторного пространства 131
3.4.1. Ранг и базис системы векторов 133
3.5. Координаты центра масс активированного комплекса 139
Задачи для самостоятельного решения 143
Контрольные задания 149

Глава 4. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ 155
4.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости 155
4.1.1. Площадь треугольника 156
4.2. Прямая линия на плоскости 157
4.2.1. Векторно-параметрическое уравнение прямой и его следствия 159
4.2.2. Нормальное уравнение прямой 160
4.3. Взаимное расположение прямых на плоскости 161
4.3.1. Задание прямых общими уравнениями 161
4.3.2. Приложения определителей к задачам геометрии 171

4.4. Квадратичные формы 172
4.4.1. Способы записи квадратичных форм 172
4.4.2. Канонический вид квадратичной формы 173
4.4.3. Метод Якоби 174
4.4.4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду 176
4.4.5. Знакоопределенность квадратичных форм 179
4.5. Алгебраические кривые второго порядка на плоскости 180
4.5.1. Эллипс 181
4.5.2. Гипербола 188
4.5.3. Парабола 196
4.6. Общее уравнение второго порядка с тремя переменными 203
4.6.1. Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры 204
4.6.2. Эллипсоид 205
4.6.3. Двуполостный гиперболоид 207
4.6.4. Однополостный гиперболоид 209
4.6.5. Эллиптический параболоид 211
4.6.6. Гиперболический параболоид 212
4.6.7. Конус 213
4.7. Прямая и плоскость в пространстве 214
4.7.1. Уравнения прямой в пространстве 223
4.7.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве 225
4.8. Многомерные точечные пространства. Гиперплоскости и выпуклые множества 232
Задачи для самостоятельного решения 237
Контрольные задания к разделам 4.1–4.3 262

ОТВЕТЫ 266

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 276

Учебное издание

Коваленко Николай Семенович
Василевич Михаил Николаевич
Яшкин Виктор Иванович

**ПРАКТИКУМ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ХИМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *Е. А. Логвинович*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *В. П. Явуз*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*
Корректор *Е. И. Бондаренко*

Подписано в печать 16.06.2021. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 16,27. Уч.-изд. л. 17,7. Тираж 105 экз. Заказ 209.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.