УДК 517.977

В.В. ГОРЯЧКИН, А.А. ПИСАРЕНКО

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Solution of nonstationary 2D discrete system in the Cauchy form is given.

Стационарная двухпараметрическая дискретная система вида

$$x(t+1,s) = Ax(t,s+1) + Dx(t,s) + Bu(t,s) \tag{1}$$

изучена достаточно полно. Найдено представление решения в форме Коши и исследован ряд структурных свойств [1]. В данной статье с использованием работы [2] найдено решение нестационарной дискретной системы вида (1) в форме Коши.

Пусть E и V – конечномерные векторные пространства над полем R действительных чисел размерности n и r соответственно; Z и Z_+ – множества целых и неотрицательных целых чисел.

Предположим, что на множестве $Z_1^2 = Z_+ \times Z$ заданы функции $\alpha_{ij}(t,s)$, $d_{ij}(t,s)$ $\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ и $b_{ij}(t,s)\left(i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,r}\right)$ со значениями в R. Определим $(n \times n)$-матрицы $A(t,s)=\left\{a_{ij}(t,s)\right\}$, $D(t,s)=\left\{d_{ij}(t,s)\right\}$ – линейные операторы $E \to E$ и $(n \times r)$-матрицу $B(t,s)=\left\{b_{ij}(t,s)\right\}$: $V \to E$ линейный оператор.

Рассмотрим двухпараметрическую нестационарную дискретную систему

$$x(t+1,s) = A(t,s)\,x(t,s+1) + D(t,s)\,x(t,s) + B(t,s)\,u(t,s), \tag{2}$$

где (t,s) – независимая переменная, определенная на множестве $Z_1^2; x(t,s): Z_1^2 \to E$ – неизвестная функция со значениями в R^n; отображение $u(t,s): Z_1^2 \to V$ трактуется как управление.

Уравнения вида (2) естественным образом возникают при аппроксимации систем уравнений с частными производными разностными схемами. Кроме того, такие уравнения имеют широкое распространение в различных приложениях: например, в теории клеточных машин и автоматов, в теории цифровой обработки многомерной информации, в частности цифровой обработки изображений [3].

Ясно, что уравнение (2) имеет бесконечное семейство решений; для обеспечения единственности зададим краевое (начальное) условие

$$x(0,s) = \alpha(s)\,(s \in Z), \tag{3}$$

где $\alpha(s)$ – некоторая функция со значениями в R^n.

Путем построения решения по шагам задачи (2), (3), непосредственно исходя из условий (2), (3), легко показать, что справедлива

Теорема 1. *Для любого фиксированного управления* $u(t,s)$ *и любого отображения* $\alpha : Z \to E$ *существует единственное решение* $x(t,s,u,\alpha)$ *уравнения (2), подчиняющееся начальному условию* $x(0,s,\alpha,u)=\alpha(s)\,(s\in Z)$.

Для построения решений уравнения (2) введем в рассмотрение неавтономные ($n \times n$)-матрицы $F^{i,j}(t,s)$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$F^{i,j}(t+1,s)=A(t,s)F^{i,j-1}(t,s+1)+D(t,s)F^{i,j}(t,s) \tag{4}$$

и следующим условиям: $F^{i,j}(t,s)=I$ – единичная матрица при $i=t$; $F^{i,j}(t,s)=0$ при $i<0$ или $j<0$, или $i+j>t$.

Ясно, что такие матрицы определяются однозначно для всех $i,j=0,1,2,...,$ и $(t,s)\in Z_1^2$.

Теорема 2. *Решение задачи (2), (3) представимо в виде*

$$x(t,s)=\sum_{j=0}^{t}F^{0,j}(t,s)\alpha(s+j)+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1}F^{i+1,j}(t,s)B(i,s+j)u(i,s+j). \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по переменным t и s. Справедливость (5) в точках $(0,s)(s\in Z)$ проверяется вычислением выражения (5) для значения независимой переменной $(0,s)$ и сравнением с условием (3).

Легко проверить, что формула (5) имеет место для $(1,s)(s\in Z)$. Действительно из (5) после упрощения получим

$$x(1,0)=F^{0,0}(1,0)\alpha(0)+F^{0,1}(1,0)\alpha(1)+F^{1,0}(1,0)B(0,0)u(0,0)\equiv$$
$$\equiv A(0,0)x(0,1)+D(0,0)x(0,0)+B(0,0)u(0,0).$$

Пусть гипотеза справедлива для $(t,s)(s\in Z)$, покажем, что она также справедлива для $(t+1,s)\,(s\in Z)$.

Из уравнения (2), соотношений (4), (5) и очевидного равенства $F^{t+1,0}_{t+1,s}B(t,s)=B(t,s)$ следует

$$x(t+1,s)=A(t,s)\,x(t,s+1)+D(t,s)\,x(t,s)+B(t,s)\,u(t,s)=$$
$$=A(t,s)\left[\sum_{j=0}^{t}F^{0,j}(t,s+1)\alpha(s+j+1)+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1}F^{i+1,s}(t,s+1)B(i,s+j+1)u(i,s+j+1)\right]+$$
$$+D(t,s)\left[\sum_{j=0}^{t}F^{0,j}(t,s)\alpha(s+j)+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1}F^{i+1,j}(t,s)B(i,s+1)u(i,s+j)\right]+$$
$$+B(t,s)u(t,s)=\sum_{j=0}^{t+1}\left(A(t,s)F^{0,j-1}(t,s+1)+D(t,s)F^{0,j}(t,s)\right)\alpha(s+i)+$$
$$+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i}\left(A(t,s)F^{i+1,j-1}(t,s+1)+D(t,s)F^{i+1,j}(t,s)\right)B(t,s+j)\,u(i,s+j)+$$
$$+B(t,s)u(t,s)=\sum_{j=0}^{t+1}F^{0,j}(t+1,s)\alpha(s+i)+B(t,s)u(t,s)+$$
$$+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i}F^{i+1,j}(t+1,s)\,B(i,s+j)u(i,s+j)=$$
$$=\sum_{j=0}^{t+1}F^{0,j}(t+1,s)\alpha(s+j)+\sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{t-i}F^{i+1}(t+1,s)\,B(i,s+j)\,u(i,s+j).$$

Что и доказывает теорему.

Определим набор полиноминальных матриц переменной λ

$$X^k\left(t,s,\lambda\right)=F^{k,t-k}(t,s)\lambda^{t-k}+....+F^{k,0}(t,s)\lambda^0.$$

Очевидно, если λ – символ операции сдвига по переменной s, т. е. для любого целого $k\geq 0$ и любой функции $f\left(t,s\right)$ на Z_1^2 имеет место выражение $\lambda^k\left(f\left(t,s\right)\right)=f\left(t,s+k\right),$ то тогда уравнение (2) и его решение, порожденное начальным условием (3), кратко можно описать соответственно следующими соотношениями:

$$x\left(t+1,s\right)=\left(A\left(t,s\right)\lambda+D\left(t,s\right)\right)x\left(t,s\right)+B\left(t,s\right)u\left(t,s\right), \tag{6}$$

$$x\left(t,s\right)=X^0\left(t,s,\lambda\right)\alpha\left(s\right)+\sum_{i=0}^{t-1}X^{t-i}\left(t,s\right)B\left(t-i-1,s\right)u\left(t-i-1,s\right). \tag{7}$$

Теорема 3. *Решение задачи (6), (3) представимо в виде (7).*

Доказательство. Распишем операторы $X^k\left(t,s,\lambda\right)$ в явном виде через матрицы $F^{i,j}\left(t,s\right)$. Тогда выполнимость краевого условия (3) очевидна. Подстановка (7) в (6) переводит последнее выражение в тождество.

1. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Мн., 1996.
2. Гайшун И.В., Горячкин В.В. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 3.
3. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125.

Поступила в редакцию 14.12.09.

Владимир Викторович Горячкин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств.

Андрей Анатольевич Писаренко – студент 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.