УДК 517.977

Е.И. ПОЯСОК

РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОГО ТИПА ОПТИМАЛЬНЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПО ВЫХОДУ

A method of the realization of optimal closable output feedback with one closure point is described by an example. Results and illustrations of numerical work are given.

Проблема синтеза оптимальных систем является центральной в теории оптимального управления с момента постановки ее первых задач на рубеже 1940–1950-х гг. В классической постановке она заключается в построении в явной форме ограниченных оптимальных обратных связей. Проблема оптимального синтеза была решена для задачи оптимального по времени перевода двумерной линейной стационарной системы в начало координат с помощью ограниченных управляющих воздействий. До сих пор не удается решить в классической постановке задачу оптимального синтеза для следующих случаев:

1) стационарной линейной системы выше 2-го порядка;
2) нестационарной линейной системы 2-го порядка;
3) линейной задачи оптимального управления с конечным горизонтом;
4) математической модели с постоянно действующими возмущениями;
5) задач, в которых не доступны точные значения текущих состояний;
6) задач, в которых доступна некоторая информация о возмущениях.

В связи с этим в Минске был предложен подход к проблеме оптимального синтеза, отличный от классического. Он ориентирован на использование современных методов оптимизации и современной вычислительной техники. Такой подход был невозможен в 1950-е гг., но теперь представляется естественным. С помощью этого подхода были разработаны методы реализации оптимальных связей для перечисленных случаев. В данной статье для линейной двумерной системы строится реализация оптимальной обратной замыкаемой связи по выходу, описанной в [1]. Порядок системы совпадает с предельным порядком системы, для которой проблема синтеза была решена в классической постановке.

Данная статья представляет собой завершение работы [1].

1. Пусть $T=[t_*, t^*]$ – промежуток времени, $T_u=\{t_*, t_*+h_u, ..., t^*-h_u\}, T_y=\{t_*+h_y, t_*+2h_y, ..., t^*-h_y\}$, $h_u=(t^*-t_*)/N, h_y=N_1 h_u$ (N, N_1 – натуральные числа); $T(\tau)=[t_*, \tau[, T^\tau=[\tau, t^*]$; $T_u^\tau=\{\tau, \tau+h_u, ..., t^*-h_u\}$, $T_u(\tau)=T_u\setminus T_u^\tau, \tau\in T_u; \theta(\tau)=\max\ \{\theta\in T_y:\theta\le\tau\in T_u\}$, $T_y(\tau)=\{t_*+h_y, t_*+$ $+2h_y, ..., \theta(\tau)\}$, если $\tau\in T_u^{t_*+h_y}; \theta(\tau)=t_*$, $T_y(\tau)=\varnothing$, если $\tau\in T_u(t_*+h_y)$; $A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}, B(t)\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t)\in\mathbb{R}^{q\times n}$, $M(t)\in\mathbb{R}^{n\times\vartheta}$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные функции; $K(\theta)\in\mathbb{R}^{q\times\vartheta}; \theta\in T_y$; $\xi^*\in\mathbb{R}^q$; $u^*\in\mathbb{R}^r$; $L\in\mathbb{R}^{n\times\vartheta}; h_i\in\mathbb{R}^n, h_i'h_i=1, i=\overline{1,m}; m>n; c\in\mathbb{R}^n$; $g\in\mathbb{R}^m; w^*\in\mathbb{R}^\vartheta$; $x_0\in\mathbb{R}^n$; $\Xi=\{\xi\in\mathbb{R}^q:|\xi|\le\xi^*\}$; $U=\{u\in\mathbb{R}^r:|u|\le u^*\}$; $u(\underline{t}:\overline{t})=(u(t)\in U,\ \underline{t}\le t<\overline{t})$; $W=\{w\in\mathbb{R}^\vartheta:|w|\le w^*\}$ – ограниченные множества; $X^*=\{x\in\mathbb{R}^n: h_i'x\le g_i, i=\overline{1,m}\}$ – ограниченное тело. Функция $u(\cdot)=(u(t),\ t\in T)$ дискретна (с периодом квантования h_u), т. е. $u(t)\equiv u(s),\ t\in[s, s+h_u[,\ s\in T_u$.

В классе дискретных управляющих воздействий $u(\cdot)$ исследуем задачу

$$c'x(t^*)\to max;\ \ \dot{x}=A(t)x+B(t)u+M(t)w;\ \ x(t_*)=x_0+Lw,\ \ x(t^*)\in X^*; \tag{1}$$

$$y(\theta)=\int_{\theta-h_y}^{\theta}C(v)x(v)dv+K(\theta)w+\xi(\theta),\ \ \xi(\theta)\in\Xi, \theta\in T_y; \tag{2}$$

$$u(t)\in U,\ t\in T;\ \ w\in W.$$

Здесь $x=x(t)\in\mathbb{R}^n$ – состояние математической модели (1) в момент времени t, $u=u(t)\in\mathbb{R}^r$ – значение управляющего воздействия; $y(\theta)\in\mathbb{R}^q, \theta\in T_y$, – сигналы измерительного устройства (2), содержащие всю доступную информацию о поведении объекта в процессе управления; $\xi(\theta)\in\mathbb{R}^q$, $\theta\in T_y$, – неизвестные ошибки измерений; $w\in\mathbb{R}^\vartheta$ – неизвестное возмущение.

2. Для иллюстрации метода [1] рассмотрим задачу оптимального управления осциллятором, которая получается из задачи (1) – (2) при $t_*=0, t^*=4$, $N=8$, $N_1=2$, $\vartheta=3$, $m=2$, $n=2$, $q=2$, $r=1$,

$u^* = 2{,}0,\ \ \xi^* = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ \ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ g = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},\ \ x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ w^* = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$H = (h_i', i = \overline{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin(2t)/4 & \cos(3t)/3 & \sin(4t)/5 \end{pmatrix},\qquad t \in T,$

$K(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) & -\sin(2\theta) \\ \cos(\theta)/2 & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix},\ \ \theta \in T_y.$ Будем считать, что в процессе управления физической системой реализуются неизвестные регулятору возмущение $w_{\text{real}} = (0{,}1 \quad 0{,}2 \quad -0{,}3)$ и ошибки измерений $\xi_{\text{real}}(t) = (0{,}1\sin(3t) \quad 0{,}1\sin(5t))$.

Выберем множество моментов замыкания $T_з = \{t_1\} = \{2\}$. Препостериорную минимаксную задачу нахождения начального экстремального сигнала запишем с помощью двух систем (3) – (4). Максимизацию $\alpha(\overline{w}, \overline{\xi}(t_1))$ осуществим итерационным методом с выбором произвольного возможного начального приближения $\overline{w},\ \overline{\xi}(t_1)$:

$$\begin{cases} \alpha(\overline{w}, \overline{\xi}(t_1); \overline{h}_i) = \max\limits_{w} \overline{h}_i' w; \\ -\xi^* - \overline{\xi}(t_1) + D(t_1)\overline{w} \le D(t_1) w \le \xi^* - \overline{\xi}(t_1) + D(t_1)\overline{w}; \\ |w| \le w^*; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \alpha(\overline{w}, \overline{\xi}(t_1)) = \min\limits_{d,\alpha} \alpha; \\ \alpha(\overline{w}, \overline{\xi}(t_1); \overline{h}_i) - g_i + \overline{h}_i' d \le \alpha,\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\overline{h}_i' = h_i' p(t^*);\ \ p(t) = F(t)F^{-1}(t_*)L + \int_{t_*}^{t} F(t)F^{-1}(\varsigma)M(\varsigma)d\varsigma,\ \ F(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}:\ \dot{F} = A(t)F, F(t_*) = E,\ t \in T;$

$D(\theta) = \int_{\theta - h_y}^{\theta} [C(v)F(v)F^{-1}(t_*)L + \int_{t_*}^{v} F(v)F^{-1}(t)M(t)dt]dv.$

Для $\overline{w} = (0 \quad 0 \quad 0),\ \overline{\xi}(t_1) = (0 \quad 0)$ коэффициенты чувствительности задачи (3) – (4) оказались равными нулю. Следовательно, $\overline{w}^0 = \overline{w},\ \overline{\xi}^0(t_1) = \overline{\xi}(t_1)$ – начальные экстремальные возмущение и ошибки измерений. Поскольку $\alpha^1 = \alpha(\overline{w}^0, \overline{\xi}^0(t_1)) = -0{,}25867 < 0$, то измерительное устройство подходящее.

Построим аппроксимацию множества замыкания $X_з^1$ по направлениям $P = (p_j,\ j = \overline{1,k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ k = 4.$ Для этого вычислим оценки начального препостериорного распределения состояния $x(t^*)$ системы ($\eta = (\eta_i,\ i = \overline{1,m}),\ \ \eta_i = h_i' F(t^*)F^{-1}(t_*)x_0 + \alpha(\overline{w}^0, \overline{\xi}^0(t_1); \overline{h}_i)$), а затем оценки множества $Z_з^1$ (задача (5)) по направлениям P:

$$\begin{cases} p_j^z = \max\limits_{z} p_j' z, \\ HF(t^*)F^{-1}(t_1)z + H\sum\limits_{i=n_з+1}^{N} \int_{ih_u - h_u}^{ih_u} F(t^*)F^{-1}(\varsigma)B(\varsigma)d\varsigma u_{i-n_з} \le g - \eta; \\ |u_i| \le u^*,\ i = \overline{1, N - n_з}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $n_з = t_1 / h_u$. Оказалось, что множество $Z_з^1 \ne \varnothing$, т. е. управляющее устройство подходящее, а система управления нормальна. Оценки множества $X_з^1$ по направлениям P равны $\alpha_j^z = p_j' F(t_1)F^{-1}(t_*)x_0 + \alpha(\overline{w}^0, \overline{\xi}^0(t_1); \overline{p}_j) + p_j^z,\ \ \overline{p}_j' = p_j' p(t_1),\ \ j = \overline{1,k}.$

Пусть $\alpha_j^0, j = \overline{1,k},$ – оценки априорного распределения состояния $x(t_1)$ по направлениям P:

$$\begin{cases} \alpha^0(\overline{p}_j) = \max\limits_{w} \overline{p}_j{}' w; \\ |w| \le w^*; \end{cases} \tag{6}$$

$$\alpha_j^0 = p_j{}' F(t_1) F^{-1}(t_*) x_0 + \alpha^0(\overline{p}_j),\ j = \overline{1,k}.$$

Управляющее воздействие до момента замыкания $u(t_* : t_1) = (u_i,\ i = \overline{1, n_з})$ найдем из условия, что начальная препостериорная программа «центрирует» априорное распределение состояния $x(t_1)$ в $X_з^1$. Эта операция сводится к решению задачи

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{u_i, \alpha}; \\ p_j{}' \sum\limits_{i=1}^{n_з} \int_{ih_u - h_u}^{ih_u} F(t_1) F^{-1}(\varsigma) B(\varsigma) d\varsigma\, u_i - \alpha \le \alpha_j^z - \alpha_j^0,\ j = \overline{1,k}; \\ |u_i| \le u^*,\ i = \overline{1, n_з}. \end{cases} \tag{7}$$

Для вычисления оптимальной начальной препостериорной программы множество X^* в задачах (3) – (5) заменим на $X^{*\beta} = X^* \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c'x \ge \beta\}$. Итерационным методом найдем максимальное значение β, при котором $\alpha < 0$ в задаче (7). Оказалось, что $\hat{u}^0(t_* : t_1) = (-2{,}0 \quad 2{,}0 \quad 2{,}0 \quad 2{,}0)$, $\beta^0 = 1{,}10981$. На рис. 1 *а*, *б* изображены аппроксимации по 4 направлениям множества замыкания и образа априорного распределения под действием $\hat{u}^0(t_* : t_1)$.

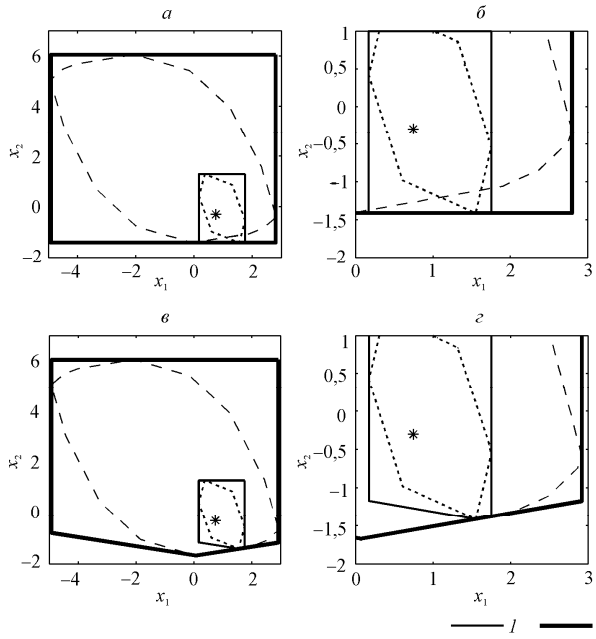

Рис. 1. Иллюстрация вычисления $\hat{u}^0(t_* : t_1)$:

1 – аппроксимация множества $X_{t_1}(\hat{u}^0)$; *2* – аппроксимация множества $X_з^1$; *3* – $X_{t_1}(\hat{u}^0)$; *4* – $X_з^1$; *5* – $x(t_1)$

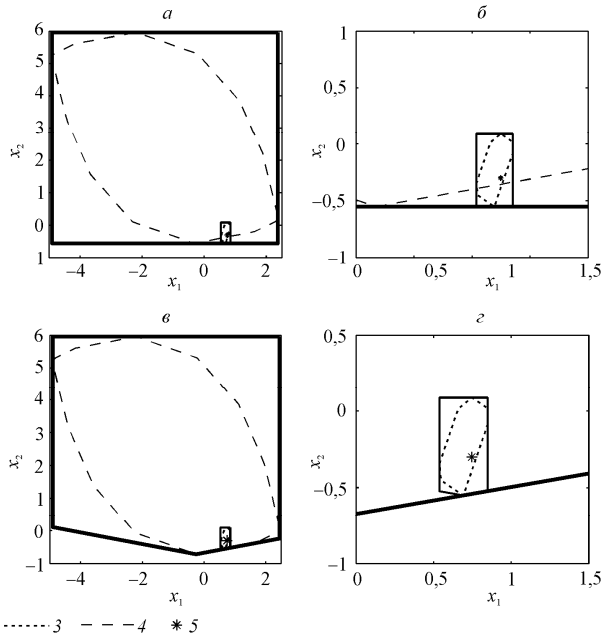

Рис. 2. Иллюстрация вычисления $\hat{u}^0(\tau : t_1 \mid \tau, y(\tau))$:

1 – аппроксимация множества $\tilde{X}_{t_1}(\hat{u}^{\tau 0} \mid \tau, y(\tau))$; *2* – аппроксимация множества $\tilde{X}_з^1(\tau, y(\tau))$; *3* – $\tilde{X}_{t_1}(\hat{u}^{\tau 0} \mid \tau, y(\tau))$; *4* – $\tilde{X}_з^1(\tau, y(\tau))$; *5* – $x(t_1)$

Качество аппроксимации $X_з^1$ проверялось в окрестности активного направления $p_4 = 3\pi/2$, поскольку вдоль него $\alpha_j^z = \alpha_j^0$. Для анализа были подсчитаны оценки α_5^z, α_6^z, α_5^0, α_6^0 по направлениям $p_5 = p_4 + \pi/18$, $p_6 = p_4 - \pi/18$. Оказалось $\alpha_j^z < \alpha_j^0$, т. е. $X_{t_1}(\hat{u}^0) \notin X_з^1$. Направления p_5, p_6 были включены в P и заново построены $X_з^1$ и $\hat{u}^0$. В результате получено $\hat{u}^0(t_* : t_1) = (-2{,}0 \quad 2{,}0 \quad 2{,}0 \quad 2{,}0)$, $\beta^0 = 0{,}82322$. На рис. 1 *в*, *г* изображены аппроксимации по 6 направлениям множества замыкания и априорного распределения состояния $x(t_1)$ под действием $\hat{u}^0(t_* : t_1)$. Проверка качества аппроксимации показала, что $X_{t_1}(\hat{u}^0) \in X_з^1$.

Таким образом, на вход физического объекта управления оптимальным регулятором по выходу (ОРВ) было подано

$$u^*(t) = -2,0,\ t \in [0,\ 0,5[;\ 2,0,\ \ t \in [0,5,\ 1[.$$

В момент времени $\tau = 1$ поступил сигнал $y(\tau)$. Текущее распределение возмущения найдем по неравенствам:

$$-\xi^* - y(\theta) \le D(\theta)w \le \xi^* - y(\theta),\ \theta \in T_y(\tau);\ |w| \le w^*. \quad (8)$$

Далее, добавляя к задачам (3), (6) ограничения (8), аналогично описанной процедуре построим множество замыкания $\tilde{X}^1_з$ и вычислим оптимальную текущую препостериорную программу. В результате получено $\hat{u}^0(\tau : t_1 \mid \tau, y(\tau)) = \begin{pmatrix} 2,0 & 2,0 \end{pmatrix}$, $\beta^0 = 1,76835$. На рис. 2 *а*, *б* изображены аппроксимации множества замыкания и текущего распределения состояния $x(t_1)$ под действием $\hat{u}^0(\tau : t_1 \mid \tau, y(\tau))$ по 4 направлениям, на рис. 2 *в*, *г* – по 6 направлениям. Проверка качества аппроксимации показала, что достаточно 6 направлений для выполнения свойства $\tilde{X}_{t_1}(\hat{u}^{\tau 0} \mid \tau,\ y(\tau)) \in$ $\in \tilde{X}^1_з(\tau, y(\tau))$.

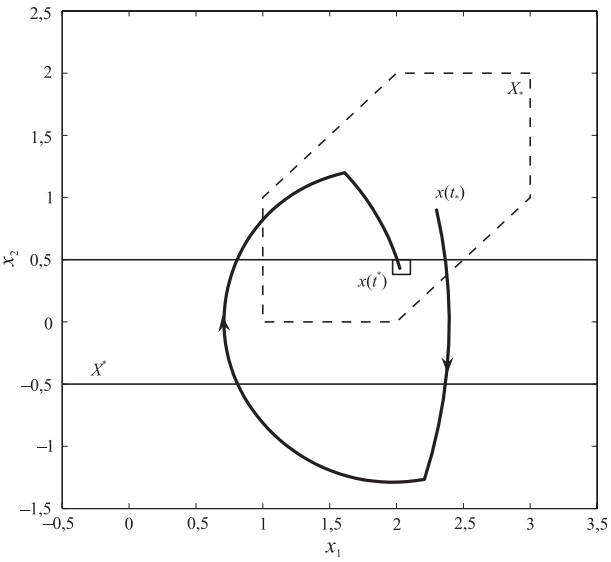

Рис. 3. Траектория системы

На вход физического объекта ОРВ подал

$$u^*(t) = 2,0,\ t \in [1,0,\ 2,0[.$$

С момента $\theta \ge t_1$ оптимальная замыкаемая обратная связь по выходу стала размыкаемой обратной связью, ее реализация описана в [2]. Результаты процесса управления изображены на рис. 3. На вход физического объекта ОРВ подал

$$u^*(t) = 2,0,\ t \in [2,0,\ 3,5[;\ 0,309,\ t \in [3,5,\ 4,0[.$$

Найденное в задаче (1) – (2) оптимальное управление гарантирует значение критерия качества $\beta^0 = 1,97120$.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. // Докл. РАН. 2008. Т. 421. № 2. С. 172.
2. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10. № 2.

Поступила в редакцию 17.09.09.

Елена Ивановна Поясок – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры методов оптимального управления Р.Ф. Габасов.