УДК 512.547

О.И. ТАВГЕНЬ, ЯН СИНЬСУН (КНР)

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $F_2(x, y)$ В $GL(6, C)$ ПРИ УСЛОВИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Let $\rho: F_2(x,y) \to GL(6,C)$ be a matrix representation of F_2, where F_2 is a free group of rank two with generators x and y. If the image of any primitive element from F_2 is an unipotent matrix, then $\rho(F_2)$ is a unipotent subgroup in $GL(6,C)$.

Пусть $F_2(x,y)$ – свободная группа с образующими x и y. Рассмотрим представление этой группы $\rho: F_2(x,y) \to GL(n,C)$, при этом образующие и все примитивные элементы группы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В [2, 3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n \le 5$. В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для $n = 6$.

Теорема. *Образ $F_2(x,y)$ относительно представления $\rho: F_2(x,y) \to GL(6,C)$ – унипотентная подгруппа в $GL(6,C)$ при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы.*

Для доказательства теоремы 1 используются следующие леммы.

Лемма 1 [1]. *Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2. Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p, имеют вид $p^\alpha q^\varepsilon p^\beta$, где $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$.*

Лемма 2. *Пусть $(\rho(p) - E)^4 = 0$ для любого примитивного элемента p. Тогда $\mathrm{tr}W(\rho(p), \rho(q) - E) = 0$, когда в $W(\rho(p), \rho(q) - E)$ встречаются не более двух элементов вида $\rho(q) - E$ (либо не более двух элементов вида $\rho(p)$), где p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2.*

Доказательство. В дальнейшем обозначим $\rho(p) = A = H + E, \rho(q) = B = T + E$, где E – единичная матрица. Из $\mathrm{tr}B^m AB^m A = 6$ $\mathrm{tr}B^m AB^{m+1} A = 6$ (лемма 1) имеем систему

$$PX = \begin{pmatrix} 9 & 30 & 18 & 5 & 16 & 18 & 4 \\ 25 & 135 & 150 & 30 & 160 & 350 & 200 \\ 36 & 231 & 315 & 55 & 350 & 945 & 700 \\ 49 & 364 & 588 & 91 & 672 & 2156 & 1960 \\ 64 & 540 & 1008 & 140 & 1176 & 4368 & 4704 \\ 81 & 765 & 1620 & 204 & 1920 & 8100 & 10080 \\ 12 & 48 & 36 & 8 & 32 & 48 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}T^2A^2 \\ \mathrm{tr}T^2ATA \\ \mathrm{tr}T^2AT^2A \\ \mathrm{tr}T^3A^2 \\ \mathrm{tr}T^3ATA \\ \mathrm{tr}T^3AT^2A \\ \mathrm{tr}T^3AT^3A \end{pmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Отсюда получаем $\mathrm{tr}T^pAT^qA = 0$, так как $\mathrm{rank}(P) = 7$. Таким образом, $\mathrm{tr}W(T, A) = 0$, когда в $W(T, A)$ встречаются не более двух элементов A. Тогда

$$\mathrm{tr}T^pHT^qH = \mathrm{tr}T^pAT^qA - \mathrm{tr}T^pAT^q - \mathrm{tr}T^pT^qH - \mathrm{tr}T^pT^q = \mathrm{tr}T^pAT^qA - \mathrm{tr}T^pAT^q - \mathrm{tr}T^pT^qA = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{tr}W(T,H) = 0$, когда в $W(T,H)$ встречаются не более двух элементов H. Поэтому $\mathrm{tr}B^pHB^qH = \sum \mathrm{tr}W(T,H) = 0$, т. е. $\mathrm{tr}W(B,H) = 0$, когда в $W(B,H)$ имеется не более двух элементов H. Аналогично $\mathrm{tr}W(T,A) = 0$, когда в $W(T,A)$ имеется не более двух элементов A. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $(\rho(p) - E)^4 = 0$ для любого примитивного элемента p. Тогда 1)* $\mathrm{tr}(H^3B^3) = 0$; *2)* $\mathrm{tr}(HB)^i = 0$; *3)* $\mathrm{tr}(HB^2)^i = 0, i = \overline{1,4}$.

Доказательство. 1) По лемме 1 $\mathrm{tr}(A^{-1}B^3) = 6$. Значит, $\mathrm{tr}((E - H + H^2 - H^3)B^3) = 6$. Из леммы 3 получаем $\mathrm{tr}(HB^3) = \mathrm{tr}(H^2B^3) = 0$. Поэтому $\mathrm{tr}(H^3B^3) = 0$.

2) Из леммы 3 имеем $\operatorname{tr}(HB)=0, \operatorname{tr}(HB)^2=0.$ Поскольку AB – унипотентная матрица, тогда $\operatorname{tr}(AB)^3=6.$ Значит,

$$6=\operatorname{tr}(AB)^3=\operatorname{tr}(B+HB)^3=\operatorname{tr}B^3+\sum \operatorname{tr}W(H,B)+\operatorname{tr}(HB)^3=6+\operatorname{tr}(HB)^3,$$

где в $W(T,H)$ не более двух H. Поэтому $\operatorname{tr}(HB)^3=0.$ Аналогично для примитивного элемента $B(AB)^3$ имеем $\operatorname{tr}B(HB)^3=0.$ Тогда

$$6=\operatorname{tr}(AB)^4=\operatorname{tr}(B+HB)^4=\operatorname{tr}B^3+\sum \operatorname{tr}W(H,B)+\operatorname{tr}B(HB)^3+\operatorname{tr}(HB)^4=6+\operatorname{tr}(HB)^4$$

(в $W(T,H)$ не более двух H, и $\operatorname{tr}B(HB)^3=0$). Поэтому $\operatorname{tr}(HB)^4=0.$

3) Поскольку AB^2, B – образы двух ассоциированных примитивных элементов группы F_2, то по лемме 3 $\operatorname{tr}((B)^2(AB^2)^3)=6.$ Отсюда $\operatorname{tr}B^2(HB^2)^3=0.$ Аналогично $\operatorname{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,4},$ так как AB^2 – унипотентная матрица.

Лемма 4. *Пусть* $(\rho(p)-E)^3=0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $H^2BHBH^2=$ $=H^2BH^2BH^2=0$ и $4H^2BH^2=H^2B^2H^2.$

Доказательство. Имеем $H^3=T^3=0.$ Для примитивного элемента BA^n также $(BA^n-E)^3=0.$ Отсюда $(2(B-E)+2nBH+n(n-1)BH^2)^3=0.$ Из этого получаем $(a_0+a_1n+a_2n^2)^3=0,$ где $a_0=2T=2B-2E,$ $a_1=2BH-BH^2,$ $a_2=BH^2.$ Из $(a_0+a_1n+a_2n^2)^3=0$ имеем $G_0+G_1n+G_2n^2+G_3n^3+G_4n^4+G_5n^5+G_6n^6=0,$ где $G_0=8T^3,$ $G_1=a_0^2a_1+a_1a_0^2+a_0a_1a_0,$ $G_6=a_2^3.$ Если взять $n=n_i,$ $i=\overline{1,7},$ неравными, то $G_i=0,$ $i=\overline{0,6}.$ Из $G_6=0$ имеем $(BH^2)^3=0,$ отсюда $H^2BH^2BH^2=0.$ Из $G_1=0$ получаем

$$T^2a_1+a_1T^2+Ta_1T=0. \tag{2}$$

Умножив (2) на $T^2,$ получим $T^2a_1T^2=0.$ Тогда

$$T^2(2H-H^2)T^2=0. \tag{3}$$

Аналогично для AB и B имеем

$$T^2(2(H+T+HT)-(H+T+HT)^2)T^2=0. \tag{4}$$

Из (3), (4) получаем $T^2HTHT^2=0.$ Следовательно, $T^2ATAT^2=0.$ Аналогично $H^2BHBH^2=0.$ Из (3) получаем $T^2(4A-A^2)T^2=0$, т. е. $4T^2AT^2=T^2A^2T^2.$ Аналогично $4H^2BH^2=H^2B^2H^2.$ Лемма доказана.

Пусть Y_s – клетка Жордана порядка s с единицей на диагонали, E_k – единичная матрица порядка k. Обозначим $B=(x_{ij}).$

Доказательство теоремы. Подходящим сопряжением A и B приведем A к жордановой форме и рассмотрим ряд случаев в зависимости от жордановой формы матрицы A.

а) $A=Y_6.$ Тогда $H=\begin{pmatrix}0 & E_5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и $H^5\neq 0, H^6=0.$ Поскольку A,B,A^sB $(s=\overline{1,5})$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $\operatorname{tr}B=\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}A^sB.$ Поэтому $\operatorname{tr}H^sB=0$ $(s=\overline{1,5}),$ т. е. $x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{65}=0,$ $x_{41}+x_{52}+x_{63}=0,$ $x_{31}+x_{42}+x_{53}+x_{64}=0,$ $x_{51}+x_{62}=0,$ $x_{61}=0.$ Таким образом, $\operatorname{tr}H^pBH^qB=0,$ где $p+q>8.$ Для примитивных элементов A и B имеем $\operatorname{tr}AB^2=\operatorname{tr}B^2=\operatorname{tr}(AB)^2=6.$ Из этого получаем $\operatorname{tr}HBHB=0.$ Аналогично для примитивных элементов A и A^mB получаем $\operatorname{tr}HA^mBHA^mB=0,$ т. е.

$$\operatorname{tr}(HB+mH^2B+\frac{m!}{2!(m-2)!}H^3B+\frac{m!}{3!(m-3)!}H^4B+\frac{m!}{4!(m-4)!}H^5B)^2=0.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$m^8F_8+m^7F_7+m^6F_6+m^5F_5+m^4F_4+m^3F_3+m^2F_2+mF_1+F_0=0,$$

где $F_0 = \mathrm{tr}HBHB, \cdots, F_8 = \mathrm{tr}H^5BH^5B$. Взяв $m = m_1, \cdots, m_9$ неравными, получим $F_j = 0 \quad (j = \overline{0,8})$. Поскольку $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p+q>8$, то $F_6 = \dfrac{2}{4!2!}\mathrm{tr}H^5BH^3B + \dfrac{1}{3!3!}\mathrm{tr}H^4BH^4B = 0$. Решая систему

$$\frac{2}{4!2!}\mathrm{tr}H^5BH^3B + \frac{1}{3!3!}\mathrm{tr}H^4BH^4B = x_{51} + x_{62} = \mathrm{tr}H^pBH^qB = 0,\ p+q>8,$$

получаем $x_{51} = x_{62} = 0$. Тогда $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p+q>6$, $\mathrm{tr}H^pBH^qBH^wB = 0$, где $p+q+w>9$. Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}B^2ABA = \mathrm{tr}AB^3 = \mathrm{tr}(AB)^3 = 6$. Отсюда $\mathrm{tr}HBHBHB = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и A^mB получаем $\mathrm{tr}HA^mBHA^mBHA^mB = 0$, т. е.

$$\mathrm{tr}(HB + mH^2B + \frac{m!}{2!(m-2)!}H^3B + \frac{m!}{3!(m-3)!}H^4B + \frac{m!}{4!(m-4)!}H^5B)^3 = 0.$$

Значит, $\sum_{k=0}^{12} m^kT_k = 0$, где $T_0 = \mathrm{tr}HBHBHB, ..., T_{12} = \mathrm{tr}H^5BH^5BH^5B$. Взяв $m = m_1, ..., m_{13}$ неравными, получим $T_j = 0\ (j = \overline{0,12})$. Решая систему $F_4 = T_6 = x_{41} + x_{52} + x_{63} = 0$, получаем $x_{41} = x_{52} = x_{63} = 0$. Таким образом, $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p+q>4$, $\mathrm{tr}H^pBH^qBH^wB = 0$, где $p+q+w>6$. Из системы $\mathrm{tr}(AB)^2 = \mathrm{tr}B^2 = \mathrm{tr}AB^2 = 6$ получаем $\mathrm{tr}HBHB = 0$. Из $\mathrm{tr}AB^2 = \mathrm{tr}B^2 = \mathrm{tr}A^2BAB = 6$, $\mathrm{tr}HBHB = 0$ получаем $\mathrm{tr}H^2BHB + \mathrm{tr}H^2B^2 = 0$. Аналогично из $\mathrm{tr}A^2BA^2B = 6$ получаем $\mathrm{tr}H^2BH^2B - 2\mathrm{tr}H^2B^2 = 0$. Из $\mathrm{tr}HA^2BHA^2B = 0$ имеем $\mathrm{tr}H^2BH^2B + \mathrm{tr}H^3BHB = 0$. Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}H^2BH^2B - 2\mathrm{tr}H^2B^2 = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и A^mB имеем $\mathrm{tr}H^2A^mBH^2A^mB - 2\mathrm{tr}H^2(A^mB)^2 = 0$. При $m = 1, 2$ получаем $-3\mathrm{tr}H^2B^2 + \mathrm{tr}H^3B^2 = 0$, $\mathrm{tr}H^2BH^2B - \mathrm{tr}H^4B^2 = 0$. Тогда $\mathrm{tr}H^2B = \mathrm{tr}H^2BH^2B - \mathrm{tr}H^4B^2 = \mathrm{tr}H^2BH^2B + \mathrm{tr}H^3BHB = 0$ и

$$T_3 = \frac{3}{3!}\mathrm{tr}H^4BH^1BH^1B + \mathrm{tr}H^2BH^2BH^2B + \frac{3}{2!}(\mathrm{tr}H^2BH^3BH^1B + \mathrm{tr}H^2BH^1BH^3B) = 0.$$

Поэтому $x_{31} = x_{42} = x_{53} = x_{64} = 0$. Пусть $B^{-1} = (s_{ij})$. Аналогично получаем $s_{31} = s_{41} = s_{51} = s_{61} = s_{63} = s_{42} = s_{52} = s_{62} = 0$. Тогда, решая систему $\mathrm{tr}HB = \mathrm{tr}HBHBHB = \mathrm{tr}HBHB = 0$, получаем $s_{31} = s_{41} = s_{51} = s_{61} = s_{63} = s_{42} = s_{52} = s_{62} = 0$. Следовательно, представление ρ – приводимо и случай а) доказан.

б) Пусть $A = \mathrm{diag}(Y_5, 1)$. Тогда $H^4 \neq 0, H^5 = 0$. Поскольку $A, B, A^sB\ (s = \overline{1,5})$ – унипотентные матрицы, то $\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}A^sB$. Поэтому $\mathrm{tr}H^sB = 0\ (s = \overline{1,5})$, т. е. $x_{31} + x_{42} + x_{53} = 0$, $x_{21} + x_{32} + x_{43} + x_{54} = 0$, $x_{41} + x_{52} = 0$, $x_{51} = 0$. Таким образом, $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p>0, q>0, p+q>6$, и $\mathrm{tr}H^pBH^qBH^wB = 0$, $p+q+w>9$.

Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}(AB)^2 = \mathrm{tr}AB^2 = \mathrm{tr}B^2 = 6$. Отсюда $\mathrm{tr}HBHB = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и A^mB получаем $\mathrm{tr}HA^mBHA^mB = 0$, т. е. $\mathrm{tr}(HB + mH^2B + \dfrac{m!}{2!(m-2)!}H^3B + \dfrac{m!}{3!(m-3)!}H^4B)^2 = 0$. Тогда $m^4F_4 + m^3F_3 + m^2F_2 + mF_1 + F_0 = 0$, где $F_0 = trHBHB, \ldots$. Положив $m = m_1, ..., m_5$ неравными, получаем $F_j = 0\ (j = \overline{0,4})$. Поскольку $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p+q>6$, то $F_4 = \dfrac{2}{3!1!}\mathrm{tr}H^4BH^2B + \dfrac{1}{2!2!}\mathrm{tr}H^3BH^3B = 0$. Решая систему $F_4 = \dfrac{2}{3!1!}\mathrm{tr}H^4BH^2B + \dfrac{1}{2!2!}\mathrm{tr}H^3BH^3B = x_{41} + x_{52} = 0$, получаем $x_{41} = x_{52} = 0$. Таким образом, $\mathrm{tr}H^pBH^qB = 0$, где $p>0$, $q>0$, $p+q>4$, и $\mathrm{tr}H^pBH^qBH^wB = 0$, где $p>0$, $q>0$, $w>0$, $p+q+w>6$. Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}(AB)^3 = \mathrm{tr}AB^3 = \mathrm{tr}B^2ABA = 6$. Отсюда $\mathrm{tr}HBHBHB = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и A^mB имеем $\mathrm{tr}HA^mBHA^mBHA^mB = 0$, т. е. $\operatorname{tr}(HB+mH^2B+\frac{m!}{2!(m-2)!}H^3B+\frac{m!}{3!(m-3)!}H^4B)^3=0$. Это можно записать так: $\sum_{k=0}^{12}m^kT_k=0$, где $T_0=\operatorname{tr}HBHBHB,\dots,T_{10}=\operatorname{tr}H^4BH^4BH^4B$. Тогда $T_j=0$ $(j=\overline{0,12})$. Решая систему $F_2=T_3=x_{31}+x_{42}+x_{53}=0$, получаем $x_{31}=x_{42}=x_{53}=0$. Таким образом,

$$\operatorname{tr}H^pBH^qB=0,\ \text{где}\ p>0,q>0,\ p+q>2, \tag{5}$$

и $\operatorname{tr}H^pBH^qBH^wB=0$, где $p>0,q>0,\ w>0,p+q+w>3$. Из $\operatorname{tr}AB^2=6$, $\operatorname{tr}B^2=6$ и $\operatorname{tr}(AB)^2=6$ следует $\operatorname{tr}HBHB=0$. Из $\operatorname{tr}AB^2=6$, $\operatorname{tr}B^2=6$, $\operatorname{tr}A^2BAB=6$ и $\operatorname{tr}HBHB=0$ получаем $\operatorname{tr}H^2BHB+\operatorname{tr}H^2B^2=0$. Аналогично из равенства $\operatorname{tr}A^2BA^2B=6$ имеем $\operatorname{tr}H^2BH^2B-2\operatorname{tr}H^2B^2=0$. Но из (5) $\operatorname{tr}H^2BH^2B=0$. Тогда

$$\operatorname{tr}H^pBH^qB=0. \tag{6}$$

Поэтому из $\operatorname{tr}B^mAB^mA=6$, $\operatorname{tr}BA^mB^{m+1}A=6$ имеем систему вида (1). Отсюда $\operatorname{tr}T^pAT^qA=0$, так как $\operatorname{rank}(P)=7$. Если $T^4\neq0$, $T^5=0$, то по аналогии с (6) $\operatorname{tr}T^pAT^qA=0$. Если $T^5\neq0$, $T^6=0$, $\operatorname{tr}T^pAT^qA=0$, то этот случай уже был разобран в а).

Поэтому $\operatorname{tr}T^pAT^qA=0$. Таким образом, $\operatorname{tr}W(A,T)=0$, когда в $W(A,T)$ не более двух T. Аналогично $\operatorname{tr}W(B,H)=0$, когда в $W(B,H)$ не более двух H. Поскольку $\operatorname{tr}B(AB)^3=6$ и $\operatorname{tr}W(B,H)=0$ (когда в $W(B,H)$ не более двух H), то $\operatorname{tr}B(HB)^3=0$. Из $\operatorname{tr}(AB)^4=6$, $\operatorname{tr}B(HB)^3=0$ и $\operatorname{tr}W(B,H)=0$ в нашем случае получаем $\operatorname{tr}(HB)^4=0$. Решая систему $\operatorname{tr}(HB)^i=0$, $i=\overline{1,4}$, имеем $x_{21}=x_{32}=x_{43}=x_{54}=0$.

Если $x_{61}\neq0$, то из $\operatorname{tr}H^iB^2=0$, $i=\overline{1,4}$, получаем $x_{26}=x_{36}=x_{46}=x_{56}=0$. Тогда все доказано. В случае $x_{61}=0$ доказательство очевидно.

в) $A=\operatorname{diag}(Y_4,Y_2)$. Тогда $H^4=0$. Можно считать, что $T^4=0$. Так как A,B,A^sB $(s=\overline{1,3})$ – унипотентны, то $\operatorname{tr}B=\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}A^sB$. Поэтому $x_{41}=0$, $x_{31}+x_{42}=0$, $x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{65}=0$. Из $\operatorname{tr}H^2BH^2B=0$, $\operatorname{tr}H^2B=0$, $\operatorname{tr}H^3BHB=0$ (лемма 2) следует $x_{31}=x_{42}=0$, $x_{61}x_{45}=0$. Теперь возможны следующие случаи.

I) Пусть $x_{45}\neq0$. Тогда $x_{61}=0$. Из $\operatorname{tr}H^3B^2=x_{45}x_{51}=0$ получаем $x_{51}=0$. По лемме 3 $\operatorname{tr}(HB)^i=0, i=\overline{1,4}$. Следовательно, $x_{21}=0$, и все доказано.

II) Пусть $x_{61}\neq0$. Тогда $x_{45}=0$. Из $\operatorname{tr}H^3B^2=0$, $\operatorname{tr}H^2BHB=0$ получаем $x_{46}=x_{35}=0$. Решая $\operatorname{tr}(HB)^i=0$, $i=\overline{1,4}$ (лемма 3), имеем $x_{32}=x_{43}=0$. Тогда в четвертой строке матрицы B все нули, кроме x_{44}, и представление приводимо.

III) Пусть $x_{61}=x_{45}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB)^i=0$, $i=\overline{1,4}$, получаем $x_{21}=x_{43}=0$. Если $x_{51}=0$, то доказательство закончено. Пусть $x_{51}\neq0$. Тогда можно доказать, что $\operatorname{tr}H^2B^2=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0$, $\operatorname{tr}(HB)^3=0$, $\operatorname{tr}(HB)^2=0$, $\operatorname{tr}H^2B^2HB+\operatorname{tr}HB^2H^2B=0$. Таким образом, $x_{35}=x_{32}=x_{65}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB^2)^i=0$, $i=\overline{1,4}$ (лемма 3), следует $x_{25}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду $A=\begin{pmatrix}A_1 & * \\ 0 & A_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1 & * \\ 0 & B_2\end{pmatrix}$.

г) $A=\operatorname{diag}(Y_4,E_2)$. Тогда $H^4=0$, $T^4=0$. Поскольку A,B,A^sB $(s=\overline{1,3})$ – унипотентны, то $\operatorname{tr}B=6=\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}A^sB$. Поэтому $\operatorname{tr}H^sB=0$ $(s=\overline{1,3})$, т. е. $x_{21}+x_{32}+x_{43}=0$, $x_{31}+x_{42}=0$, $x_{41}=0$. Из $\operatorname{tr}H^2BH^2B=0$, $\operatorname{tr}H^2B=0$ (лемма 2) следует $x_{31}=x_{42}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB)^2=0$, $i=\overline{1,3}$, получаем $x_{21}=x_{32}=x_{43}=0$. Если $x_{51}=x_{61}=0$, то все доказано. Пусть это не так. Тогда, сопрягая A и B подходящей матрицей $P=\operatorname{diag}(E_4,P_1)$, перестановочной с A, получаем $x_{51}=0$, $x_{61}=1$. Как и в случае б), имеем $\frac{4}{3!}\operatorname{tr}H^3B^2HB^2+\frac{2}{2!2!}\operatorname{tr}H^2B^2H^2B^2=0$. Решая систему $\operatorname{tr}H^2B^2=\frac{4}{3!}\operatorname{tr}H^3B^2HB^2+$

$+\dfrac{2}{2!2!}\mathrm{tr}H^2B^2H^2B^2=0,$ получаем $x_{36}=0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей вида $P_2=\begin{pmatrix}P_3 & P_4\\ 0 & E_2\end{pmatrix},$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{62}=x_{63}=x_{64}=x_{65}=x_{66}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0, i=\overline{1,3}$ (лемма 3), имеем $x_{26}=0.$ Если $x_{56}=0,$ то все очевидно. Пусть $x_{56}\neq 0,$ тогда из $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,3},$ имеем $x_{25}=x_{35}=x_{45}=0,$ и все доказано.

д) $A=\mathrm{diag}(Y_3,Y_3).$ Тогда $H^3=0.$ Доказательство делится на два случая.

I) Пусть $x_{34}=x_{61}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B)=0,$ $\mathrm{tr}(H^2B)^2=0$ (лемма 2) получаем $x_{64}=x_{31}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,4}$ (лемма 3), имеем $x_{21}+x_{54}=0,$ $x_{21}x_{54}-x_{51}x_{24}=0.$ Рассмотрим матрицу $K=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{24}\\ x_{51} & x_{54}\end{pmatrix},$ составленную из элементов матрицы $B.$ Тогда $\mathrm{tr}K=0,$ $\det K=0.$ Поэтому либо K нулевая, либо K сопряжением приводится к виду $K=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$ В первом случае все очевидно. Во втором случае, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $P=\begin{pmatrix}aE & bE\\ cE & dE\end{pmatrix},$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{54}=x_{51}=x_{21}=0,$ $x_{24}=1.$ Из $\mathrm{tr}(HB)=0,$ $\mathrm{tr}(HB)^2=0$ получаем $x_{65}=x_{32}=0.$ Поэтому из $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0,$ $i=\overline{1,4}$ (лемма 3), имеем $x_{63}=x_{52}=x_{41}=0,$ т. е. представление приводимо.

II) Пусть $x_{34},$ x_{61} не все равны 0. Тогда из $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,4},$ имеем $x_{31}+x_{64}=0,$ $x_{31}x_{64}-x_{61}x_{34}=0.$ Рассмотрим матрицу $0\neq M=\begin{pmatrix}x_{31} & x_{34}\\ x_{61} & x_{64}\end{pmatrix},$ составленную из элементов матрицы $B.$ Тогда $\mathrm{tr}M=0,$ $\det M=0.$ Поэтому M сопряжением приводится к виду $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$ т. е. $x_{34}=1,$ $x_{64}=x_{61}=x_{31}=0.$

Из $\mathrm{tr}(HBH^2B)=0$ (лемма 2), $\mathrm{tr}(HBH^2B)^2=0$ (потому что $\mathrm{tr}(HBH^2B)^2=$ $=\mathrm{tr}(HB(H^2BHBH^2)B)=\mathrm{tr}0=0$ (лемма 4)) получаем $x_{51}=x_{62}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,4},$ получаем $x_{21}=x_{65}=0,$ $x_{54}=-x_{32},$ $x_{52}=-x_{32}^2.$ Используя $x_{54}=-x_{32},$ $x_{52}=-x_{32}^2,$ сопряжем A и B подходящей матрицей $P,$ перестановочной с $A,$ и получим $x_{32}=x_{52}=x_{54}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^2)=0$ (лемма 2), $\mathrm{tr}(H^2B^2)^2=0$ (лемма 4) получаем $x_{41}=0,$ что и требуется.

е) $A=\mathrm{diag}(Y_3,Y_2,1).$ Из $\mathrm{tr}(H^2B)=\mathrm{tr}(HBH^2B)=0$ получаем $x_{31}=x_{34}x_{51}=0.$

I) Пусть $x_{3,4}\neq 0,$ $x_{51}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB)^i=0,$ $i=\overline{1,3},$ имеем $x_{21}=0,$ $x_{32}+x_{54}=0,$ $x_{32}x_{54}-x_{52}x_{34}=0.$ Рассмотрим матрицу $0\neq M_1=\begin{pmatrix}x_{32} & x_{34}\\ x_{52} & x_{54}\end{pmatrix},$ составленную из элементов матрицы $B.$ Тогда $\mathrm{tr}M_1=0,$ $\det M_1=0$ и M_1 сопряжением приводится к виду $M_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$ Если $x_{6,1}\neq 0,$ то, сопрягая A и B подходящей матрицей $P,$ перестановочной с $A,$ получаем

$$B=\begin{pmatrix}x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & x_{1,6}\\ 0 & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6}\\ 0 & 0 & x_{3,3} & 1 & x_{3,5} & x_{3,6}\\ 0 & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} & x_{4,5} & x_{4,6}\\ 0 & 0 & x_{5,3} & 0 & x_{5,5} & x_{5,6}\\ 1 & x_{6,2} & x_{6,3} & x_{6,4} & x_{6,5} & x_{6,6}\end{pmatrix}.$$

Из $\mathrm{tr}(HB^2HB)=0,\ \mathrm{tr}(H^2B^2)=0$ имеем $x_{36}=x_{56}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^3)=0,\ \mathrm{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,3},$ получаем $x_{26}=x_{46}=x_{53}=x_{42}=0.$ Доказательство закончено.

Если $x_{61}=0,$ то, сопрягая A и B подходящей матрицей $P,$ перестановочной с $A,$ получим матрицу такого же вида $B,$ но с $x_{61}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^2)=0$ получаем $x_{41}=0,$ т. е. пара матриц (A,B) приводима.

II) Пусть $x_{34}=0,\ x_{51}\neq 0.$ Из $\mathrm{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,4},$ получаем $x_{21}+x_{54}=0,\ x_{21}x_{54}-x_{51}x_{24}=0.$ Рассмотрим матрицу $0\neq M_2=\begin{pmatrix} x_{21} & x_{24}\\ x_{51} & x_{54}\end{pmatrix},$ составленную из элементов матрицы $B.$ Тогда $\mathrm{tr}M_2=\det M_2=0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей $P,$ перестановочной с $A,$ получаем

$$B=\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & x_{1,6}\\ 0 & x_{2,2} & x_{2,3} & 0 & x_{2,5} & x_{2,6}\\ 0 & 0 & x_{3,3} & 0 & x_{3,5} & x_{3,6}\\ 0 & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} & x_{4,5} & x_{4,6}\\ 1 & x_{5,2} & x_{5,3} & 0 & x_{5,5} & x_{5,6}\\ 0 & x_{6,2} & x_{6,3} & x_{6,4} & x_{6,5} & x_{6,6}\end{pmatrix}.$$

Из $\mathrm{tr}(H^2B^2)=\mathrm{tr}(HB^2HB)=0$ имеем $x_{35}=x_{36}x_{64}=0.$ Пусть $x_{64}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,4},$ имеем $x_{64}=x_{14}=0,$ и все доказано. В случае $x_{64}\neq 0,\ x_{36}=0$ все очевидно.

III) Пусть $x_{34}=x_{51}=0.$ Из системы $\mathrm{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,3},$ имеем $x_{54}=x_{32}=x_{21}=0.$ Если $x_{61}\neq 0,$ то, сопрягая A и B подходящей матрицей $P,$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{41}=0, x_{61}=1.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^2)=0$ имеем $x_{36}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^3)=\mathrm{tr}(HB^2HB)=\mathrm{tr}(HB^2)^i=0,\ i=\overline{1,3},$ получаем либо $x_{26}=x_{52}=x_{56}=0,$ либо $x_{24}=x_{35}=0.$ В каждом случае пара (A,B) приводима. Случай $x_{61}=0,\ x_{41}\neq 0$ разбирается аналогично.

ж) $A=\mathrm{diag}(Y_3,E_3).$ Тогда $H^3=0.$ $T^3=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B)=0$ получаем $x_{31}=0.$ Из $\mathrm{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,3},$ имеем $x_{21}=x_{32}=0.$ Если $x_{41}=x_{51}=x_{61}=0,$ то все доказано. Если это не так, то, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $P=\mathrm{diag}(aE,P_1),$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{61}=1,\ x_{41}=x_{51}=0.$ Из $\mathrm{tr}(H^2B^2)=\mathrm{tr}(HB^2)=\mathrm{tr}(HB^2)^2=0$ получаем $x_{36}=0,\ x_{26}=0.$ В случае $x_{34}=x_{35}=0$ все очевидно. Пусть это не так. Тогда из $\mathrm{tr}(HB^2)=0,\ \mathrm{tr}(H^2B^3)=0$ имеем $x_{34}x_{42}+x_{35}x_{52}=0,\ x_{34}x_{46}+x_{35}x_{56}=0.$ Поскольку $x_{34},\ x_{35}$ не все 0, то, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $P=\mathrm{diag}\left(E,\begin{pmatrix} c & -x_{35}\\ p & x_{34}\end{pmatrix},1\right),$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{51}=x_{54}=x_{35}=0,\ x_{34}=1.$ Если $x_{56}=0,$ то пара (A,B) приводима. Если $x_{56}\neq 0,$ то из $\mathrm{tr}(HB^3)=0,\ \mathrm{tr}(H^2B^4)=0$ получаем $x_{25}=x_{45}=0,$ и снова пара (A,B) приводима.

Случай, когда A состоит из блоков Жордана порядка не более двух, следует из общей теоремы 2 в [3].

Авторы благодарны профессору В.В. Беняш-Кривцу за помощь в проверке вычислений и написании статьи.

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений. М., 1974.
2. Самсонов Ю.Б., Тавгень О.И. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 6. С. 29.
3. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 74.

Поступила в редакцию 05.03.10.

Олег Игнатьевич Тавгень – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры.
Ян Синьсун – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – О.И. Тавгень.