

ГODOВАЯ РЕНТА ПОСТНУМЕРАНДО С ИЗМЕНЕНИЕМ ВЫПЛАТ ПО ЗАКОНУ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Д. В. Семенчук, студент 1 курса ГИУСТ БГУ

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Л. Г. Третьякова (ГИУСТ БГУ)

В практике встречаются случаи, когда размеры членов потока платежей изменяются во времени. Такие изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка (например, условиями производства и сбыта продукции), а иногда и случайными факторами. Частным случаем такого потока является переменная рента. Члены переменной ренты изменяются

по каким-то установленным (принятым, оговоренным и т. д.) законам или условиям развития [1].

Введем обозначения:

R – первый член ренты;

n – срок ренты;

i – процентная ставка ($i \in (0,1)$); $h = (1 + i)^{-1}$; (1)

A – современная стоимость;

S – наращенная стоимость; $S = (1 + i)^n A$;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения, $a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Значения $a_{n;i}$ находятся в таблицах;

$s_{n;i}$ – коэффициент наращения ренты, $s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Рассмотрим ренту с постоянным абсолютным изменением ее членов во времени. Изменения размеров членов ренты происходят здесь согласно арифметической прогрессии с первым членом R и разностью a , т. е. образуют последовательность $R, R + a, R + 2a, \dots, R + (n - 1)a$.

Докажем утверждение о том, как вычислить в этом случае современную и наращенную стоимости.

Утверждение. Современная стоимость годовой ренты постнумерандо с изменением выплат по закону арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right) a_{n;i} - \frac{na h^n}{i}, \quad (2)$$

а наращенная стоимость S равна

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right) s_{n;i} - \frac{na}{i}, \quad (3)$$

Доказательство

Имеется последовательность платежей

$$R, R + a, R + 2a, \dots, R + (n - 1)a$$

Современная стоимость данного потока платежей равна

$$A = Rh + (R + a)h^2 + (R + 2a)h^3 + \dots + (R + (n - 1)a)h^n = Rh(1 + h + h^2 + \dots + h^{n-1}) + ah^2(1 + 2h + 3h^2 + \dots + (n - 1)h^{n-2}) \quad (4)$$

Выражение $1 + h + h^2 + \dots + h^n$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем h . Известно, что

$$1 + h + h^2 + \dots + h^{n-1} = \frac{1-h^n}{1-h}. \quad (5)$$

Продифференцируем равенство (5), получим

$$1 + 2h + 3h^2 + \dots + (n - 1)h^{n-2} = \frac{-nh^{n-1}(1-h) + (1-h^n)}{(1-h)^2}. \quad (6)$$

Используя равенства (1, 5, 6), преобразуем равенство (4):

$$A = Rh \frac{1-h^n}{1-h} + \frac{a}{i^2} (1 - h^n) - \frac{an}{i^2} h^{n-1} (1 - h) = \left(R + \frac{a}{i}\right) a_{n;i} - \frac{nah^n}{i}$$

Т. к. $S = (1 + i)^n A$ то получаем, что

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right) s_{n;i} - \frac{na}{i}$$

Утверждение полностью доказано.

Рассмотрим два примера на применение для вычислений формул (2–3).

1. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 2500 руб. в течение 10 лет при поступлении денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 000 руб., процентная ставка равна 12 % годовых. Определить современную и наращенную стоимости переменного потока платежей.

По условию задачи $R = 50000, a = 2500, i = 0,12, n = 10$. Тогда

$$A = \left(50000 + \frac{2500}{0,12}\right) \cdot a_{10;12} - \frac{10 \cdot 2500}{0,12 \cdot 1,12^{10}} = 333183 \text{ руб.}$$

$$S = \left(50000 + \frac{2500}{0,12}\right) \cdot s_{10;12} - \frac{10 \cdot 2500}{0,12} = 1034791 \text{ руб.}$$

2. Решено в течение 10 лет создать фонд в сумме 1 000 000 у. е. на денежные средства, поступающие в фонд в конце каждого года, начисляется 9 % годовых. Первый взнос составляет 80 тыс. у.е. По схеме возрастающей или убывающей арифметической прогрессии платежей можно создать фонд?

Т. к. $S=1000, n=10, i=0,09$, то относительно разности прогрессии имеем уравнение

$$1000 = \left(80 + \frac{a}{0,09}\right) s_{10;9} - \frac{10a}{0,09} \quad (7)$$

По таблицам находим $S_{10;9} = 15,19293$ и, решая относительно a уравнение (7), получаем, что $a = -3,807513$. Т. о., фонд можно создать по схеме убывающей арифметической прогрессии платежей.

Литература

1. *Четыркин, Е. М.* Финансовая математика : учебник / Е.М. Четыркин. – 7-е изд., испр. – М. : Дело, 2007. – 400 с.