ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА СТАВКИ ДЛЯ ПОСТОЯННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕНТ

***Д. А. Шляхина**, студентка 1 курса ГИУСТ БГУ*
Научный руководитель:
*кандидат физ.-мат. наук, доцент **Л. Г. Третьякова** (ГИУСТ БГУ)*

В финансовых расчетах могут применяться различные виды процентных ставок. Две ставки называются эквивалентными, если в конкретных условиях они приводят к одинаковым финансовым результатам [1].

Известны формулы эквивалентности между непрерывной δ дискретной i ставками:

$$\delta = \ln(1+i) \text{ или } i = e^{\delta} - 1 \qquad (1)$$

(δ называют силой роста).

При расчетах на практике чаще используют случай, когда члены потоков платежей поступают дискретно. Однако в некоторых сложных финансовых проблемах более целесообразно считать, что члены потоков платежей поступают непрерывно. Например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом поток платежей можно рассматривать как непрерывный.

Известно, что если платежи производятся раз в году, то коэффициент приведения вычисляется по формуле:

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1\backslash p}-1)}. \tag{2}$$

По определению у непрерывной ренты $p \to \infty$, вычислим, чему в этом случае равен коэффициент приведения $\tilde{a}_{n;i}$:

$$\tilde{a}_{n;i} = \lim_{p\to\infty} a_{n;i}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1\backslash p}-1)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}, \tag{3}$$

т. к. по правилу Лопиталя $\lim\limits_{p\to\infty} p((1+i)^{1\backslash p}-1) = \ln(1+i)$.

Заметим, что формула (3) предполагает непрерывное поступление платежей и дискретное начисление процентов. Более естественной является ситуация, когда оба процесса (поступление платежей и наращение процентов) являются непрерывными.

Для получения соответствующей формулы воспользуемся уравнениями эквивалентности (1), тогда

$$\tilde{a}_{n;\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \tag{4}$$

Заметим, что вычисления по формулам (3) и (4) дадут один и тот же результат только для эквивалентных ставок.

В качестве иллюстраций вышесказанному рассмотрим пример. Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1000 млн руб. в год, продолжительность разработки – 5 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны. Найти современную стоимость дохода при ставке 10 %.

С одной стороны

$$A = R * \frac{i}{\ln(1+i)} * a_{n;i} = 1000 \frac{0{,}1}{\ln 1{,}1} * a_{5;10} = 3977{,}32 \text{ млн. руб.}$$

С другой стороны, при $\delta = 0{,}09531 = \ln 1{,}1$, имеем, что

$$A = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} = 1000 * \frac{1-e^{-5*0{,}09531}}{0{,}09531} = 3977{,}34 \text{ млн. руб.}$$

Вычисления по формулам (3) и (4), как и следовало ожидать, дают почти один и тот же результат.

В финансовых расчетах часто по известной современной стоимости *A* и члену ренты требуется определить силу роста δ из уравнения

$$\tilde{a}_{n;\delta} = \frac{A}{R}, \tag{5}$$

которое равносильно уравнению

$$1 - e^{-\delta n} - \frac{A}{R}\delta = 0.$$

Обозначим $f(\delta) = 1 - e^{-\delta n} - \frac{A}{R}\delta$, тогда

$f'(\delta) = ne^{-\delta n} - \frac{A}{R} < 0$ (f − убывающая функция));
$f''(\delta) = -n^2\delta^{-n\delta} < 0$ (f − выпуклая вверх функция)).

Для нахождения решения уравнения (5) целесообразно применить метод Ньютона-Рафсона. Последовательность

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{1 - e^{-n\delta_k} - \frac{A}{R}\delta_k}{ne^{-n\delta_k} - \frac{A}{R}} \tag{6}$$

достаточно быстро сходится к точному решению уравнения (5), если удачно определить отрезок $[\delta_1;\ \delta_2]$, содержащий решение уравнения (5) и начальное приближение δ_0 из этого отрезка.

Рассмотрим пример: единовременное вложение средств в предприятие составило 80 тыс. руб., начисления процентов и отдача от инвестиций в течение пяти лет непрерывны, причем базовая выплата *R*=20 тыс. руб./год. Определить доходность инвестиций в виде силы роста.

По условию $\frac{A}{R} = 4$, возьмем $\delta_1 = 0{,}1$. Тогда

$$f(\delta_1) = -\frac{A}{R}\delta_1 - e^{-\delta_1 n} + 1 = -0{,}0065;\ f'(\delta_1) = -\frac{A}{R} + ne^{-\delta_1 n} = -0{,}9673;$$

$$\delta_2 = \delta_1 - \frac{f(\delta_1)}{f'(\delta_1)} = 0{,}093.$$

Вычислим значения функции f и ее производной от δ_2, получим

$$f(\delta_2) = -\frac{A}{R}\delta_2 - e^{-\delta_2 n} + 1 = -0{,}0004;\ f'(\delta_2) = -\frac{A}{R} + ne^{-\delta_2 n} = -0{,}863;$$

Тогда по формуле (6) имеем, что

$\delta_3 = \delta_2 - \frac{f(\delta_2)}{f'(\delta_2)} = 0{,}093$, т. е. приближенным решением уравнения (6) является $\delta = 0{,}093$. Доходность инвестиций составляет 9,3 %.

Литература

1. *Четыркин, Е. М.* Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. – 7-е изд., испр. – М. : Дело, 2007. – 400 с.