Теорема 3. *Уравнение (7) является уравнением Пенлеве-типа. Его общее решение есть рациональная функция постоянных интегрирования.*

Рассмотрим уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(t)v^2 - \gamma, \tag{12}$$

где $F(t)$ – произвольная аналитическая функция; γ – произвольный параметр.

Введением в (12) замены (10), а также дифференцированием полученного уравнения приходим к уравнению

$$T^{IV} = 2FT'' + F'T' - \gamma T. \tag{13}$$

Следовательно, общее решение уравнения (12) на основании (10), (13) есть рациональная функция постоянных интегрирования.

Уравнение (9) совпадает с (12) при $F(t) = -t$, $\gamma = 0$. В случае $\gamma = 1$ уравнение (12) есть XXVII каноническое уравнение в случае $m = 2$ из списка [1].

Преобразование Беклунда для уравнения (12) в случае $F(t) = 2(t^2 + \alpha)$, $\gamma = -2\beta$ (α – произвольный параметр) получено в [2].

Литература

1. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИУ, 1939.

2. Цегельник В.В. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа.* Мн.: Издательский центр БГУ, 2007.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ДОПУСТИМЫМИ НУЛЯМИ НА КОНТУРЕ

Чехменок Т.А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
TChekhmenok@gmail.com

Пусть L – простой гладкий замкнутый контур, который делит расширенную комплексную плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Не ограничивая общности, будем считать, что $z = 0 \in D^+$, $z = \infty \in D^-$. Пусть на L заданы функции $G(t)$, $g(t) \in H^\mu(L)$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in L$. Необходимо найти все функции $\Phi^\pm(z)$, отличные от тождественного нуля, однозначные и аналитические в $D^\pm$ соответственно, непрерывные предельные значения которых $\Phi^\pm(t) \neq 0$ на контуре L удовлетворяют краевому условию

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta + g(t), \tag{1}$$

где $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ – произвольное рациональное положительное число, $\beta \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число.

Решения будем искать в классах функций $\mathcal{A}_{k,l,r}$, где k – количество нулей в области D^+, l – количество нулей в области D^-, r – количество нулей на контуре L. При этом параметры $k, l, r \in \mathbb{N}_{\varkappa}$ таковы, что

$$\varkappa_0 = \varkappa - \alpha k - \beta l > 0,$$

где $\varkappa = \mathrm{ind}_L G(t)$.

Будем говорить [2, 3], что пара функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ является решением задачи (1), если существуют ветви многозначных функций $[\Phi^+(z)]^\alpha$, $[\Phi^-(z)]^\beta$, граничные значения которых удовлетворяют условию (1).

Предположим, что $\Phi^\pm(z) \in \mathcal{A}_{,,}$ – решение задачи (1). Обозначим через $z_1^+, \ldots, z_k^+$ нули $\Phi^+(z)$ в области D^+ и как $z_1^-, \ldots, z_{l_1}^-$, $l_1 \leqslant l$ нули $\Phi^-(z)$ в области $D^- \backslash \{\infty\}$, решение может иметь нуль порядка $l_0 = l - l_1$ на бесконечности. Тогда введем новые функции [2, 3]:

$$\Phi^+(z) = \prod_{j=1}^{k}(z - z_j^+)\Phi_1^+(z), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = z^{-l_0}\prod_{i=1}^{l_1}\left(1 - \frac{z_i^-}{z}\right)\Phi_1^-(z), \quad z \in D^-. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), запишем последнее краевое условие в следующей эквивалентной форме:

$$[\Phi_1^+(t)]^\alpha = \left[\prod_{i=1}^{l_1}(t - z_i^-)\right]^\beta \left[\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z_j^+}{t}\right)\right]^{-\alpha} t^{-\alpha k - \beta l}G(t)[\Phi_1^-(t)]^\beta +$$

$$+ g(t)\left[\prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{z_j^+}{t})\right]^{-\alpha} t^{-\alpha k}, \quad t \in L. \tag{3}$$

Задача (3) рассматривается в классе $\mathcal{A}_{,,}$.

Введем новые функции [3]:

$$\Phi_2^+(z) = \left[\prod_{i=1}^{l_1}(z - z_i^-)\right]^{-\beta} [\Phi_1^+(z)]^\alpha, \quad z \in D^+,$$

$$\Phi_2^-(z) = \left[\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z_j^+}{z}\right)\right]^{-\alpha} [\Phi_1^-(z)]^\beta, \quad z \in D^-. \tag{4}$$

Вводя новые неизвестные функции (4), получим следующую задачу, эквивалентную задаче (3) [3]:

$$\Phi_2^+(t) = t^{-\varkappa}G(t)t^{\varkappa_0}\Phi_2^-(t) + g(t)\left[\prod_{i=1}^{l_1}(t - z_i^-)\right]^{-\beta} \left[\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z_j^+}{t}\right)\right]^{-\alpha} t^{-\alpha k}, \quad t \in L. \tag{5}$$

В работе [1] получена структура порядков нулей решений краевой задачи (1) на контуре

$$\alpha_j = \alpha k_j + \beta l_j + m_j, \quad j = \overline{2, r},$$

при этом в нашем случае $\alpha_1 = \varkappa_0 - \sum_{j=2}^{r}\alpha_j$. Доказана ограниченность числа нулей решений в случае α и β рациональных, и неограниченность, когда хотя бы один из показателей α, β иррационален, но в данной статье автор не проводит исследования по выяснению условий разрешимости краевой задачи.

В отличие от указанной статьи получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1) в случае, когда $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, $\beta \in \mathbb{N}$.

Пусть $\alpha_j = a \in \mathbb{N}$, $j = \overline{2, r}$. Тогда, следуя [1], $\alpha_1 + a(r-1) = \varkappa_0$, $\alpha_1 > 0$.

Пусть $k = 0$, т.е. рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (1) в классе функций $\mathcal{A}_{,,}$. Справедлива следующая

Теорема. *Если $\alpha = p_\alpha/q_\alpha \in \mathbb{Q}_+$, $\beta \in \mathbb{N}$, то при $\varkappa_0 > 0$ задача (1) разрешима в классе функций $\mathcal{A}_{0,l,r}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) НОД$(\beta; p_\alpha) = 1$;

2) НОД$(a - m_j; p_\alpha) =$ НОД$(\beta; p_\alpha) = d \neq 1$, $j = \overline{2, r}$, где $a(r-1) < \varkappa_0$.

В случае разрешимости решение задачи (1) в классе функций $\mathcal{A}_{0,l,r}$ имеет вид

$$\Phi^+(z) = [X^+(z)]^{1/\alpha} \left[\prod_{i=1}^{l_1} (z - z_i^-)\right]^{\beta/\alpha} \{\Psi^+(z) + C\}^{1/\alpha} \prod_{j=1}^{r} (z - t_j)^{\alpha_j/\alpha}, \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = z^{-l_0} \prod_{i=1}^{l_1} \left(1 - \frac{z_i^-}{z}\right) [X^-(z)]^{1/\beta} \{\Psi^-(z) + C\}^{1/\beta} \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{t_j}{z}\right)^{\alpha_j/\beta}, \quad z \in D^-,$$

где $\alpha_j = \alpha k_j + \beta l_j + m_j > 0$, k_j, l_j, $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{2, r}$, $t^\varkappa G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, а

$$\Psi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int_L g(\tau) \left(\left[\prod_{i=1}^{l_1} (\tau - z_i^-)\right]^{\beta} X^+(\tau) \prod_{j=1}^{r} \left(\tau - t_j\right)^{\alpha_j} \right)^{-1} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^\pm.$$

Константа C выбирается исходя из условия $-C \notin \Psi^+(D^+) \bigcup \Psi^-(D^-)$.

Также получен критерий разрешимости краевой задачи (1) в случае, когда $k \neq 0$.

Литература

1. Аксентьева Е.П. *О порядках граничных нулей решений степенной задачи Римана* // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. 2002. Т. 14. С. 61–71.

2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977.; Engl. Transl. – Oxvord; London etc.: Pergamon Press, 1966.

3. Mityushev V.V., Rogosin S.V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications.* Boca Raton; London; New York; Washington, 1999.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Шилин А.П.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
a.p.shilin@gmail.com

Пусть L – простая гладкая замкнутая конечная положительно ориентированная кривая в комплексной плоскости. Зададим на этой кривой H-непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и H-непрерывно дифференцируе-