

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А., Ефимова Т.А.

Белорусский государственные университет, Минск, Беларусь
zhadaeva@bsu.by; igor-timoshchenko@yahoo.com; fanofbeatles@yandex.by

Пандемия COVID-19 ставит перед нами как никогда насущный вопрос о понимании процесса распространения инфекционных заболеваний в современном мире. Причем важным аспектом становится не только характер передачи вируса от человека к человеку, но и структура социальных связей в обществе, а также характер перемещения людей внутри страны и между странами. Важнейшей задачей становится разработка новых математических моделей распространения инфекции, позволяющих так же оценивать последствия принятия или непринятия конкретных управленческих решений.

В данной работе рассматривается следующая дробно-дифференциальная SEIRD модель, основанная на модели [1]:

$$\begin{aligned}D_{0,t}^{\alpha_1} s(x,t) &= \alpha n - \left(1 - \frac{A}{n}\right) \beta_i s i - \left(1 - \frac{A}{n}\right) \beta_e s e - \mu s + \nabla \cdot (n v_s \nabla s), \\D_{0,t}^{\alpha_2} e(x,t) &= \left(1 - \frac{A}{n}\right) \beta_i s i + \left(1 - \frac{A}{n}\right) \beta_e s e - \sigma e - \phi_e e - \mu e + \nabla \cdot (n v_e \nabla e), \\D_{0,t}^{\alpha_3} i(x,t) &= \sigma e - \phi_d i - \phi_r i - \mu i + \nabla \cdot (n v_i \nabla i), \\D_{0,t}^{\alpha_4} r(x,t) &= \phi_r i + \phi_e e - \mu r + \nabla \cdot (n v_r \nabla r), \\D_{0,t}^{\alpha_5} d(x,t) &= \phi_d i,\end{aligned}$$

причем $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Здесь введены следующие обозначения. $s(x, t)$ – число здоровых людей, восприимчивых к болезни, $e(x, t)$ – число заразившихся людей, у которых заболевание находится в инкубационном периоде, $i(x, t)$ – число заболевших людей, $r(x, t)$ – число переболевших людей, более не восприимчивых к заболеванию, $d(x, t)$ – число умерших людей, $n = s + e + i + r$. Данные функции нормированы на все население страны. Далее, α – рождаемость, σ – величина, обратная инкубационному периоду заболевания, ϕ_e – коэффициент бессимптомного выздоровления, ϕ_r – коэффициент выздоровления, ϕ_d – коэффициент смертности, β_e – коэффициент бессимптомных контактов, β_i – коэффициент контактов людей с симптомами заболевания, μ – общий коэффициент смертности без вируса, v_s , v_e , v_i , v_r – параметры миграции разных групп населения, которые в общем случае являются тензорами, A – параметр, учитывающий распределение ресурсов, который предназначен для моделирования тенденций вспышек направленных на большие центры населения. На

границах расчетной области может задаваться как нулевой поток, соответствующий закрытию границ страны, так и отличный от нуля.

В модель введена дробная производная $D_{0,t}^\alpha$ Герасимова–Капуто по времени [2], которая позволяет учесть влияние всей предыстории развития ситуации с распространением вируса на текущее состояние дел.

В работе обсуждаются численные методы решения рассматриваемой системы уравнений, которые основываются на работах [3–6] авторов, а также результаты моделирования и эвристический потенциал модели.

Литература

1. Viguerie A [et. al.]. *Simulating the spread of COVID-19 via a spatially-resolved susceptible–exposed–infected–recovered–deceased (SEIRD) model with heterogeneous diffusion* // Appl. Math. Lett. 2021. V. 111. P. 106617.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*. Мн.: Наука и техника, 1987.
3. Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А. *Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 819–825.
4. Тимощенко И.А. *Численный метод решения уравнения двусторонней аномальной диффузии в многомерной области* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2014. № 1. С. 96–100.
5. Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А. *Дробно-дифференциальная модель описания электродиффузионного процесса и разностные методы ее реализации* // Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Десятой Международной конференции. Казань: Казанский университет, 2014. С. 29–35.
6. Абрашина-Жадаева, Н.Г. Тимощенко И.А. *Некоторые методы решения краевых задач математической физики, содержащие производные дробных порядков* // Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Одиннадцатой Международной конференции. Казань: Казанский университет, 2016. С. 8–13.

РЕАЛИЗАЦИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МОДЕЛИРОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ

Босяков С.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
bosiakov@bsu.by

Периодонтальная связка корня зуба является составным элементом поддерживающего аппарата корня зуба и представляет собой тонкий слой мягкой соединительной ткани, расположенной между твердыми поверхностями корня зуба и костью зубной альвеолы. Аналитическая модель вязкоупругой периодонтальной связки с дробным экспоненциальным ядром для описания эволюции деформаций в ткани периодонтальной связки представлена в исследовании [1]. Настоящая работа развивает это направление и посвящена оценке параметров дробного ядра релаксации при наклонно-вращательном перемещении асимметричного корня зуба.