интегральные уравнения» как один из модулей, посвященный пространствам наряду с метрическими и банаховыми пространствами. Гильбертовы пространства играют важную роль как в самом функциональном анализе, так и в различных его приложениях, включая дифференциальные уравнения, цифровая обработка информации и другие области.

В лекционном курсе студенты знакомятся с теоретическим материалом, в котором излагаются такие вопросы, как построение элемента наилучшей аппроксимации элементами подпространства гильбертова пространства, его связь с проекцией, построение проекции в конкретных гильбертовых пространствах. Далее излагается теория рядов Фурье. Значительное внимание уделено разнообразию полных ортонормированных систем: тригонометрических, полиномиальных и ступенчатых. На практических занятиях проводится закрепление теоретического материала для решения прикладных задач. Так, студенты в весовых пространствах квадратично суммируемых функций отрабатывают построение таких полиномиальных базисов, как полиномы Лежандра, Чебышева первого и второго рода, которые затем применяются для решения дифференциальных уравнений. Однако основное внимание уделяется вопросам аппроксимации функции с помощью рядов Фурье. Задачи подобраны таким образом, чтобы показать особенности сходимости рядов Фурье. На примере разложения в тригонометрический ряд Фурье функции с разрывами первого рода, студентам предлагается оценить погрешность аппроксимации функции по неравенству Бесселя, показать поведение частной суммы ряда Фурье в окрестности точки разрыва. Тем самым студенты должны представлять себе, чем обоснован эффект Гиббса, который возникает в прикладных задачах обработки изображений. При организации учебного процесса студентами используется электронный учебно-методический комплекс по курсу лекций, слайды к лекционному курсу и методические разработки для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов [1–3].

Литература

1. Дайняк В.В., Чеб Е.С. *Гильбертовы пространства и аппроксимация*: метод. указ. к практическим занятиям. Мн.: БГУ, 2020.

2. Чеб Е. С. *Функциональный анализ и интегральные уравнения*: электронный учебно-метод. комплекс для специальности: 1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям). Мн.: БГУ, 2020. – 201 с. № 006923062020. Деп. в БГУ 23.06.2020.

3. Чеб Е.С. *Интегральные преобразования*: учеб. материалы. В 2-х ч. Ч. 1. Мн.: БГУ, 2018.

О ДОПОЛНЕНИИ К МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» НА ФАКУЛЬТЕТЕ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Деревяго А.Н., Егоров А.А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
dzeraviahaAN@bsu.by; andreyegorov69@gmail.com

Программа дисциплины «Методы математической физики», традиционно преподаваемой на факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ, предполагает проведение практических занятий по применению метода Фурье решения краевых задач для линейных уравнений гиперболического типа. В связи с изменением учебных планов в текущем году и увеличением количества часов, отведенных на эти занятия, представляется возможным включение в программу дисциплины ряда важных дополнительных тем. Одна из таких связана с изучением явления резонанса в задачах колебаний струн и стержней [1, 2].

Простейшей математической моделью колебаний в условиях резонанса является задача о колебаниях однородной жестко закрепленной струны, вызванных непрерывно распределенной силой с линейной плотностью $f(x,t) = A\rho_0 \sin\omega t$, ρ_0 – постоянная плотность струны, $A = \mathrm{const}$, при этом начальные смещение и скорость отсутствуют:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A\sin\omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Предполагается, что частота вынуждающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний струны, т.е. $\omega = \omega_n = n\pi a/l$. Подставляя разложения

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad A\sin\omega_n t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l A\sin\omega_n t \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2A[1-(-1)^k]}{k\pi}\sin(\omega_n t),$$

в уравнение (1) и учитывая начальные условия (3), приходим к семейству задач Коши

$$u_k''(t) + \omega_k^2 u_k(t) = \frac{2A[1-(-1)^k]}{k\pi}\sin(\omega_n t), \tag{4}$$

$$u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

При $k \neq n$ частное решение уравнения (4) имеет вид

$$u_k^{\text{част}}(t) = \frac{2A[1-(-1)^k]}{k\pi(\omega_k^2 - \omega_n^2)}\sin\omega_n t.$$

Принимая во внимание начальные условия (5), для функций $u_k(t)$ получим

$$u_k(t) = \frac{2A[1-(-1)^k]}{k\pi(\omega_k^2 - \omega_n^2)}\left(\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega_k}\sin\omega_k t\right).$$

При $k = n$ уравнение (4) запишется в виде

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = \frac{2A[1-(-1)^n]}{n\pi}\sin\omega_n t,$$

частное решение которого

$$u_n^{\text{част}}(t) = -\frac{A[1-(-1)^n]}{n\pi\omega_n} t\cos(\omega_n t)$$

и, следовательно,

$$u_n(t) = \frac{A[1-(-1)^n]}{n\pi\omega_n}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t - t\cos\omega_n t\right).$$

Окончательно приходим к решению краевой задачи (1)–(3)

$$u(x,t) = \frac{A[1-(-1)^n]}{n\pi\omega_n}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t - t\cos\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} +$$
$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k(\omega_k^2-\omega_n^2)}\left(\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Как видим, на n-й частоте собственных колебаний струны возникло явление резонанса. Оно вызвано наличием в решении слагаемого с множителем $t\cos\omega_n t$, амплитуда которого стремится к бесконечности при $t\to\infty$. Заметим, что в этой задаче резонанс можно наблюдать только на частотах с нечетными номерами, поскольку $u_n(t)=0$ для четных n.

При изучении математических моделей колебаний с неоднородными граничными условиями также может возникнуть резонансный случай. Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного стержня, один конец которого жестко закреплен, а к другому приложена сила $F(t)=AE\sigma\sin\omega t$, $A=\mathrm{const}$, где E – модуль упругости, σ – площадь поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}
&u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,\\
&u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=A\sin\omega t,\quad t\geqslant 0,\\
&u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.
\end{aligned}\tag{6}$$

Освободимся от неоднородности в граничном условии, перенеся ее в дифференциальное уравнение. Для этого представим решение в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+W(x,t),$$

где функция $W(x,t)=Ax\sin\omega t$ удовлетворяет заданным граничным условиям. Тогда для функции $v(x,t)$ получим краевую задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned}
&v_{tt}=a^2v_{xx}+A\omega^2x\sin\omega t,\quad 0<x<l,\quad t>0,\\
&v|_{x=0}=0,\quad v_x|_{x=l}=0,\quad t\geqslant 0,\\
&v|_{t=0}=0,\quad v_t|_{t=0}=-A\omega x,\quad 0\leqslant x\leqslant l,
\end{aligned}$$

которая решается аналогично (1)–(3). При $\omega=\omega_n=(2n+1)\pi a/(2l)$ решение $u(x,t)$ краевой задачи (6) имеет вид

$$u(x,t)=Ax\sin\omega_n t+\frac{4Al\omega_n(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t+t\cos\omega_n t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}+$$
$$+\frac{8Al}{\pi^2}\sum_{k=0,k\neq n}^{\infty}\frac{\omega_n^2(-1)^k}{(2k+1)^2(\omega_k^2-\omega_n^2)}\left(\sin\omega_n t-\frac{\omega_k}{\omega_n}\sin\omega_k t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

В этом случае наступает явление резонанса: амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы ω, приложенной к концу $x=l$ стержня, возрастает неограниченно пропорционально времени t.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике.* М.: Физматлит, 2004.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ p-КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ СВОЙСТВА

Довгодилин В.В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
footballer4@mail.ru

Пусть $\mathbb{C}_p$-кольцо p-комплексных чисел: чисел вида $a+jb$, где $a,b\in\mathbb{R}$, $j^2=0$, $j\neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc и только они. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой: $\|z\|=\|x+jy\|=\max\{|x|,|y|\}$. Эту норму будем называть *параболической. Модулем* p-комплексного числа назовается $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Более подробно с p-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1, 2]. Пусть $D\subset\mathbb{C}_p$ – область.

Определение 1. Говорят, что функция $f: D\subset\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ *p-голоморфна* в точке $z\in\mathbb{C}_p$, если существует предел

$$f'(z)=\lim_{\substack{h\to 0,\\ \operatorname{Re}h\neq 0}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

число $f'(z)$ называется *производной* в точке z. Функция p-голоморфная в каждой точке D называется *p-голоморфной* в D.

Определение 2. Функция $f: D\subset\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ называется *p-дифференцируемой* в $z\in\mathbb{C}_p$, если $\exists A\in\mathbb{C}_p$ такое, что $f(z+h)-f(z)=Ah+o(\|h\|)$, при $\|h\|\to 0$, $\operatorname{Re}h\neq 0$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ p-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_p$. Тогда*

$$\|f(z+h)-f(z)\|\leqslant\sqrt{6}\max_{\tau\in[z,z+h]}\|f'(\tau)\|\|h\|.$$

Теорема 2. *Пусть функция f бесконечно p-дифференцируема в $D\subset\mathbb{C}_p$, а также $\|f^{(n)}(z)\|\leqslant Me^{AR^m}$ при любых $n\in\mathbb{N}$, где $z\in U(a)=\{\|z-a\|\leqslant R\}\subset D$. Тогда f разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

равномерно сходящийся в $U(a)$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ p-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_p$ и $a=\alpha+j\beta\in D$. Если $u'_x(\alpha,\beta)\neq 0$, то существует открытая окрестность A точки a и открытая окрестность B точки $b=f(a)$ такие, что функция $f: A\to\to B$ имеет обратную $f^{-1}: B\to A$, которая непрерывно p-дифференцируема в B и $\{f^{-1}\}'(w)=\{f'(z)\}^{-1}$, где $w=f(z)$. Если же $u'_x(x,y)\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, то f не обратима в соответствующей окрестности точки a.*