УДК 517.983

Ю.М. ВУВУНИКЯН

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СВЕРТОЧНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

The concept of the fundamental function of evolutionary convolution-operator equation $a*x=y$ is determined and theorems about the necessary and sufficient conditions of existence of fundamental function are proved.

Мы будем рассматривать линейные эволюционные операторы, т. е. линейные операторы A, определяемые равенством

$$Ax = a*x,$$

где x – финитная слева векторнозначная обобщенная функция со значениями в локально выпуклом пространстве (ЛВП) E, импульсная характеристика a является операторнозначной (со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов $L(E)$) обобщенной функцией с носителем на положительной полуоси, $*$ – операция свертки векторнозначных обобщенных функций [1].

Уравнение

$$a*x=y, \tag{1}$$

где y – известная финитная слева обобщенная функция со значением в ЛВП E, будем называть *эволюционным сверточно-операторным уравнением*.

1. Фундаментальная функция: необходимые условия существования

Определение фундаментальной функции для уравнения (1) вводится аналогично определению фундаментальной функции для дифференциально-операторного уравнения (см., например, [2]).

Определение 1. ***Фундаментальной функцией*** эволюционного сверточно-операторного уравнения (1) называется операторнозначная (со значениями в пространстве $L(E)$) обобщенная функция Φ с носителем на R_{+}=[0; +∞), удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$a*\Phi = \delta\otimes I, \tag{2}$$

$$a*\Phi = \Phi * a. \tag{3}$$

Для того чтобы получить необходимые условия существования фундаментальной функции, введем понятие сохраняющей последовательности финитных функций. Для этого сначала рассмотрим функцию Соболева:

$$\omega(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t|<1 \\ 0, & |t|\ge 1 \end{cases}.$$

Функцию ω обычно «нормируют», т. е. умножают на число c^{-1}, где $c=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)dt$. Получим новую функцию $\omega_1(t)=c^{-1}\omega(t)$ такую, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_1(t)dt=1$.

Далее определим функцию $\xi(t)=2\omega_1(2t)$ и по функции $\xi(t)$ построим функцию $\psi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\xi(s)ds$.

Построенная функция $\psi(t)$ является бесконечно дифференцируемой и монотонно возрастающей на всей числовой оси и удовлетворяет условиям: а) $\psi(t)=0\ \ \forall t\le-\varepsilon$; б) $\psi(t)=1\ \ \forall t\ge\varepsilon$; с) $\psi\left(-\infty;+\infty\right)=[0;1]$.

Далее для любого натурального числа n построим функцию μ_n:

$$\mu_n(t)=\psi(n+\frac{1}{2}+t)\psi(n+\frac{1}{2}-t).$$

Функции μ_n бесконечно дифференцируемы на всей числовой оси и являются четными и финитными. Построенную последовательность (μ_n) будем называть *сохраняющей последовательностью финитных функций*.

Пусть D – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций. Для любого натурального числа n обозначим $D_n=\{x\in D \mid \operatorname{supp}\subset[-n;n]\}$. Так как функция μ_n тождественно равна единице на отрезке $[-n;n]$, то $\mu_n\varphi=\varphi$ для любой функции φ, принадлежащей D_n. Следовательно, имеет место следующее соотношение: $D_n=\mu_nD_n\subset\mu_nD$.

С другой стороны, так как $\operatorname{supp}\mu_n\subset[-n-1;n+1]$, то $\mu_nD\subset D_{n+1}$.

Таким образом, имеем $D_n\subset\mu_nD\subset D_{n+1}$.

Пусть Φ – фундаментальная функция уравнения (1). Будем предполагать, что Φ имеет конечный порядок сингулярности. Определим $R_n(\lambda)$ как преобразование Лапласа обобщенной функции $\mu_n\Phi$:

$$\mathrm{R}_n(\lambda)=\widetilde{\mu_n\Phi}(\lambda)=(\mu_n\Phi)(e^{-\lambda(\cdot)})=\Phi(\mu_ne^{-\lambda(\cdot)})\qquad(n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{C}).$$

Очевидно, что функция $R_n(\lambda)$ аналитична на всей комплексной плоскости.

Для любого $c>0$ обозначим $\Pi_c=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,Re\,\lambda>c\}$ и будем называть Π_c *положительной правой полуплоскостью*.

Применяя теорему Пэли – Винера, получим, что найдется такое натуральное число m, что множество

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-m}R_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\Pi_c\right\},\tag{4}$$

где Π_c – положительная правая полуплоскость, ограничено.

Пусть ЛВП E бочечно. Тогда множество (4) равностепенно непрерывно.

Будем предполагать, что импульсная характеристика уравнения (1) финитна, и определим спектральную характеристику $\tilde{a}$ этого уравнения:

$$\tilde{a}(\lambda)=a(e^{-\lambda(\cdot)})\qquad(\lambda\in\mathbb{C}).$$

В силу равенства (3) получаем $a*(\mu_n\Phi)=(\mu_n\Phi)*a$, откуда следует соотношение $\tilde{a}(\lambda)\widetilde{\mu_n\Phi}(\lambda)=\widetilde{\mu_n\Phi}(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\quad(n\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{C})$, т. е.

$$\tilde{a}(\lambda)\mathrm{R}_n(\lambda)=\mathrm{R}_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\quad(n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{C}).$$

Из равенства (2) в силу линейности свертки получим

$$a*\mu_n\Phi+a*(1-\mu_n)\Phi=\delta\otimes I,$$

т. е. для любой функции $\varphi \in D$ имеем

$$(a*\mu_n\Phi)(\varphi)+(a*(1-\mu_n)\Phi)(\varphi)=\varphi(0)I. \tag{5}$$

Полагая в равенстве (5) $\varphi(t)=\mu_k(t)e^{-\lambda t}$ и учитывая, что тогда $\varphi(0) = 1$, получим равенство

$$(a*\mu_n\Phi)(\mu_k e^{-\lambda(\cdot)})+(a*(1-\mu_n)\Phi)(\mu_k e^{-\lambda(\cdot)})=I,$$

которое равносильно равенству

$$\big(\mu_k(a*\mu_n\Phi)\big)(e^{-\lambda(\cdot)})-I=\big(\mu_k(a*(\mu_n-1)\Phi)\big)(e^{-\lambda(\cdot)}). \tag{6}$$

Рассмотрим сначала правую часть равенства (6). Так как $\mu_n(t)-1=0$ для всех $t\in[0;\ n]$ и $\operatorname{supp} T\subset[0;\ +\infty)$, то $\operatorname{supp}(\mu_n-1)\Phi\subset[n;\ +\infty)$. Отсюда, в силу того что $\operatorname{supp} a\subset[0;\ +\infty)$, следует, что $\operatorname{supp}(a*(\mu_n-1)\Phi)\subset[n;\ +\infty)$. Тогда получаем, что носитель обобщенной функции $\mu_k(a*(\mu_n-1)T)$ – компакт, который содержится в луче $[n;\ +\infty)$. Применяя снова теорему Пэли – Винера, получим, что найдется такое натуральное число j, что множество

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-j}e^{n\sigma}\big(\mu_k(a*(\mu_n-1)T)\big)(e^{-\lambda(\cdot)})\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\},$$

где $\mathit{\Pi}_c$ – положительная правая полуплоскость, ограничено.

Тогда в силу равенства (6) множество

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-j}e^{n\sigma}\Big(\big(\mu_k(a*\mu_nT)\big)(e^{-\lambda(\cdot)})-I\Big)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\} \tag{7}$$

ограничено. Для достаточно больших k мы имеем

$$\big(\mu_k(a*\mu_n\Phi)\big)(e^{-\lambda(\cdot)})=(a*\mu_n\Phi)(e^{-\lambda(\cdot)})=a(e^{-\lambda(\cdot)})(\mu_n\Phi)(e^{-\lambda(\cdot)})=\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda). \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) получаем, что множество

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-j}e^{n\sigma}\big(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)-I\big)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\} \tag{9}$$

ограничено, а в силу того, что пространство E бочечно, это множество равностепенно непрерывно. Заметим, что, не уменьшая общности, можно считать $j = m$.

Таким образом, была получена следующая

Теорема 1. *Пусть* Φ *– фундаментальная функция уравнения эволюционного сверточно-операторного уравнения (1) и пусть* (μ_n) *– сохраняющая последовательность финитных функций.*

Для любого натурального числа n определим операторную функцию

$$R_n(\lambda)=\widetilde{\mu_n\Phi}(\lambda)\quad(\lambda\in\mathbb{C}).$$

Тогда функции $R_n(\lambda)$ *обладают следующими свойствами:*

1) $R_n(\lambda)$ *аналитична на всей комплексной плоскости;*

2) $\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)=R_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\quad(\lambda\in\mathbb{C})$;

3) существует такое натуральное число m, что семейства операторов

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-m}R_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\},\ \left\{(1+|\lambda|)^{-m}e^{n\operatorname{Re}\lambda}\big(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)-I\big)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\},$$

где $\mathit{\Pi}_c$ *– положительная правая полуплоскость, равностепенно непрерывны.*

Исходя из теоремы 1, дадим следующее

Определение 2. Пусть $(R_n(\lambda))$ – последовательность операторных функций, аналитических на всей комплексной плоскости, и существует положительная правая полуплоскость $\mathit{\Pi}_c$, что выполняются следующие условия:

1) $\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)=R_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\quad(\lambda\in\mathit{\Pi}_c)$;

2) существует такое натуральное число m, что равностепенно непрерывны семейства $\left\{(1+|\lambda|)^{-m}R_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\}$, $\left\{(1+|\lambda|)^{-m}e^{n\operatorname{Re}\lambda}\big(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)-I\big)\,|\,\lambda\in\mathit{\Pi}_c\right\}$.

Тогда последовательность $(R_n(\lambda))$ называется *резольвентной последовательностью на* $\mathit{\Pi}_c$ *для уравнения* (1).

2. Фундаментальная функция: критерий существования

Будем считать, что пространство E отделимо, полно и бочечно.

Теорема 2. *Для того чтобы у эволюционного сверточно-операторного уравнения (1) существовала фундаментальная функция, необходимо и достаточно, чтобы у этого уравнения существовала резольвентная последовательность на некоторой положительной правой полуплоскости.*

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы 1 и определения 2.

Достаточность. Пусть $(R_n(\lambda))$ – резольвентная последовательность для уравнения (1) на положительной правой полуплоскости Π_c.

Будем обозначать через $D(-n;\, n)$ подпространство функций из пространства D, носители которых содержатся в интервале $(-n;\, n)$.

Отметим свойства последовательности пространств $D(-n;\, n)$:

1) $D(-n;\, n) \subset D(-n-1;\, n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$; 2) $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} D(-n;\, n) = D.$

Для любой функции φ, принадлежащей подпространству $D(-n;\, n)$, и любого элемента u, принадлежащего пространству E, определим $\Phi(\varphi)u$ следующим образом:

$$\Phi(\varphi)u = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \Pi_c} \hat{\varphi}(\lambda) R_n(\lambda) u \, d\lambda, \tag{10}$$

где $\hat{\varphi}$ – сопряженное преобразование Лапласа функции φ, $\partial \Pi_c$ – граница полуплоскости Π_c.

Так как $\varphi \in D(-n;\, n)$, то $\operatorname{supp} \varphi = [\alpha;\, \beta] \subset (-n;\, n)$, и

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} \varphi(t) dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} \varphi(t) dt. \tag{11}$$

Тогда, применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$\lambda \hat{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{\lambda t} \varphi(t) dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (e^{\lambda t})' \varphi(t) dt =$$

$$= e^{-\lambda t} \varphi(t) \,|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} \varphi'(t) dt = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} \varphi'(t) dt.$$

Интегрируя это соотношение, получим, что для любого натурального числа k справедливо следующее равенство:

$$\lambda^k \hat{\varphi}(\lambda) = (-1)^k \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda t} \varphi^{(k)}(t) dt. \tag{12}$$

Из соотношения (12) имеем

$$|\lambda|^k \left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|e^{\lambda t}\right| \left|\varphi^{(k)}(t)\right| dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{t \operatorname{Re}\lambda} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| dt \le c_k e^{\beta \operatorname{Re}\lambda}, \tag{13}$$

где $c_k = (\beta - \alpha) \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| dt$, если $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$.

Из неравенств (13) получаем, что для любого натурального числа k существует такое число $M_k > 0$, что справедливо неравенство

$$(1 + |\lambda|)^k \left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| \le M_k e^{\beta \operatorname{Re}\lambda}. \tag{14}$$

Неравенство (14) равносильно следующему неравенству:

$$\left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| \le M_k (1 + |\lambda|)^{-k} e^{\beta \operatorname{Re}\lambda}. \tag{15}$$

Так как $(R_n(\lambda))$ – резольвентная последовательность для уравнения (1) на положительной правой полуплоскости Π_c, то в силу определения 2 существует такое натуральное число m, что семейство $\left\{(1 + |\lambda|)^{-m} R_n(\lambda) \,|\, \lambda \in \Pi_c\right\}$ равностепенно непрерывно.

В неравенстве (15) возьмем $k = m + 2$.

Тогда, введя обозначение $M = M_{m+2}$, получим неравенство

$$\left|\hat{\varphi}(\lambda)\right| \le M (1 + |\lambda|)^{-(m+2)} e^{\beta \operatorname{Re}\lambda}, \tag{16}$$

и, следовательно, интеграл в правой части равенства (10) абсолютно сходится.

Проверим корректность определения $\Phi(\varphi)u$ с помощью равенства (10).

Пусть $n_1 > n$. Докажем, что для любой $\varphi \in D(-n;\, n)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial \Pi_c} \tilde{\varphi}(\lambda) \mathrm{R}_n(\lambda) u \, d\lambda = \int\limits_{\partial \Pi_c} \tilde{\varphi}(\lambda) \mathrm{R}_{n_1}(\lambda) u \, d\lambda. \tag{17}$$

Из определения 2 следует, что

$$R_n(\lambda) = (1+|\lambda|)^m \alpha_1(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c), \tag{18}$$

$$R_{n_1}(\lambda) = (1+|\lambda|)^m \alpha_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c), \tag{19}$$

$$\tilde{a}(\lambda) R_n(\lambda) - I = (1+|\lambda|)^m e^{-n\operatorname{Re}\lambda} \beta_1(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c), \tag{20}$$

$$\tilde{a}(\lambda) R_{n_1}(\lambda) - I = (1+|\lambda|)^m e^{-n_1\operatorname{Re}\lambda} \beta_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c), \tag{21}$$

где $\alpha_1(\lambda),\ \alpha_2(\lambda),\ \beta_1(\lambda),\ \beta_2(\lambda)$ равностепенно непрерывны на Π_c.

Умножая равенство (20) справа на $R_{n_1}(\lambda)$ и пользуясь (19), получим

$$\tilde{a}(\lambda) R_n(\lambda) R_{n_1}(\lambda) - R_{n_1}(\lambda) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} \beta_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{22}$$

Аналогично, умножая равенство (21) слева на $R_n(\lambda)$ и пользуясь соотношением (18), получим

$$R_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda) R_{n_1}(\lambda) - R_n(\lambda) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n_1\operatorname{Re}\lambda} \alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{23}$$

Так как $R_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)$, равенство (23) равносильно равенству

$$\tilde{a}(\lambda) R_n(\lambda) R_{n_1}(\lambda) - R_n(\lambda) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n_1\operatorname{Re}\lambda} \alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{24}$$

Вычитая из равенства (22) равенство (24), получаем

$$R_n(\lambda) - R_{n_1}(\lambda) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} [\beta_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) - e^{-(n_1-n)\operatorname{Re}\lambda}\alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda)] \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{25}$$

Обозначим $\gamma(\lambda) = \beta_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) - e^{-(n_1-n)\operatorname{Re}\lambda}\alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c)$ и отметим, что, так как $n_1 - n > 0$, то $\gamma(\lambda)$ равностепенно непрерывна.

Таким образом, имеем

$$R_n(\lambda) - R_{n_1}(\lambda) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} \gamma(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c), \tag{26}$$

где $\gamma(\lambda)$ равностепенно непрерывна.

Пусть f – линейный непрерывный функционал на пространстве E. Из равенства (26) получаем

$$f(R_n(\lambda)u - R_{n_1}(\lambda)u) = (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} f(\gamma(\lambda)u) \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{27}$$

Так как семейство операторов $\gamma(\lambda)$ $(\lambda \in \Pi_c)$ равностепенно непрерывно, то функция $h(\lambda) = f(\gamma(\lambda)u)$ ограничена на полуплоскости Π_c, т. е. существует такое число $C > 0$, что $|h(\lambda)| \le C$ для всех $\lambda \in \Pi_c$.

Таким образом, из равенства (27) получаем, что аналитическая на всей комплексной плоскости функция $g(\lambda) = f(R_n(\lambda)u - R_{n_1}(\lambda)u)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$|g(\lambda)| \le C(1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} \quad (\lambda \in \Pi_c). \tag{28}$$

Полагая в неравенстве (15) $k = 2m + 2$, получим

$$|\hat{\varphi}(\lambda)| \le M_{2m+2}(1+|\lambda|)^{-(2m+2)} e^{\beta\operatorname{Re}\lambda}. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda)g(\lambda)$. Функция $\psi(\lambda)$ аналитична на всей комплексной плоскости и, как следует из неравенств (28) и (29), для любого $\lambda = \sigma + i\tau \in \Pi_c$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{aligned} |\psi(\lambda)| &= |\hat{\varphi}(\lambda)||g(\lambda)| \le M_{2m+2} C (1+|\lambda|)^{-(2m+2)} e^{\beta\operatorname{Re}\lambda} (1+|\lambda|)^{2m} e^{-n\operatorname{Re}\lambda} = \\ &= M_{2m+2} C (1+|\lambda|)^{-2} e^{-(n-\beta)\operatorname{Re}\lambda} = C' \frac{1}{\left(1+\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\right)^2} e^{-(n-\beta)\operatorname{Re}\lambda} \le C' \frac{1}{1+\tau^2} e^{-(n-\beta)\operatorname{Re}\lambda}, \end{aligned} \tag{30}$$

откуда следует, что интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_c} \psi(\lambda)\,d\lambda$ абсолютно сходится и интегрирование по $\partial\Pi_c$ можно заменить на интегрирование по $\partial\Pi_r$, где $r > c$.

Таким образом, применяя соотношения (29) и (30), имеем

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_c} \hat{\varphi}(\lambda)(R_n(\lambda)u - R_{n_1}(\lambda)u)\,d\lambda \right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_c} \hat{\varphi}(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_c} \psi(\lambda)\,d\lambda\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_r} \psi(\lambda)\,d\lambda\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r+i\tau)|\,d\tau \le C' e^{-(n-\beta)r} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{2} C' e^{-(n-\beta)r}. \end{aligned} \tag{31}$$

Так как $\beta < n$, то $n - \beta > 0$, и, следовательно, при $r \to +\infty$ правая часть неравенства (31) стремится к нулю. Переходя к этому пределу, мы из (31) получаем

$$f\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\sigma}\hat{\varphi}(\lambda)(R_n(\lambda)u - R_{n_1}(\lambda)u)\,d\lambda\right) = 0 \quad (\varphi \in D(-n;\, n)). \tag{32}$$

Так как равенство (32) выполняется для любых линейных функционалов на ЛВП E, то в силу отделимости пространства E справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\sigma}\hat{\varphi}(\lambda)(R_n(\lambda)u - R_{n_1}(\lambda)u)\,d\lambda = 0 \quad (\varphi \in D(-n;\, n)),$$

откуда и следует требуемое равенство (17).

Аналогично доказывается, что правая часть равенства (10) не зависит от выбора резольвентной последовательности и соотношение $\operatorname{supp} T \subset [0;\, +\infty)$.

Докажем, что построенная обобщенная функция T удовлетворяет соотношению (2), т. е. $a * \Phi = \delta \otimes I$. В самом деле, из равенства (20) получаем, что для любых $u \in E$ и линейного непрерывного функционала на пространстве выполняется равенство $f(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)u - u) = (1 + |\lambda|)^m e^{-n\sigma} f(\beta(\lambda)u) \quad (\lambda \in \Pi_\sigma)$, откуда следует

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\sigma}\hat{\varphi}(\lambda) f(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)u - u)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\sigma}\hat{\varphi}(\lambda)(1 + |\lambda|)^m e^{-n\sigma} f(\beta(\lambda)u)\,d\lambda.$$

Так же как и ранее, доказывается, что для всех $\varphi \in D(-n;\, n)$ правая часть этого соотношения равна нулю, значит, получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\sigma}\hat{\varphi}(\lambda) f(\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda)u - u)\,d\lambda = 0,$$

откуда следует, что

$$(a * \Phi)(\varphi)u = \varphi(0)u. \tag{33}$$

Так как равенство выполняется для любого $u \in E$, то из (33) получаем равенство

$$(a * \Phi)(\varphi) = \varphi(0)I,$$

которое, применяя обобщенную функцию δ, можно записать в виде

$$(a * \Phi)(\varphi) = (\delta \otimes I)(\varphi). \tag{34}$$

Равенство (34) установлено для всех $\varphi \in D(-n;\, n)$, и так как пространство D является объединением всех подпространств $D(-n;\, n)$, то оно верно на пространстве D, т. е. выполняется равенство (2).

В силу того, что по определению резольвентной последовательности $\tilde{a}(\lambda)R_n(\lambda) = R_n(\lambda)\tilde{a}(\lambda) \quad (\lambda \in \Pi_c)$, то, повторяя рассуждения, приведенные выше, получим равенство

$$(\Phi * a)(\varphi) = (\delta \otimes I)(\varphi). \tag{35}$$

Из равенств (34) и (35) получаем соотношение $(a * \Phi)(\varphi) = (\Phi * a)(\varphi)$, откуда следует равенство (3).

Таким образом, построенная обобщенная функция Φ удовлетворяет условиям (2) и (3), т. е. Φ – фундаментальная функция эволюционного сверточно-операторного уравнения (1), что и требовалось доказать.

1. S c h w a r t z L. // Annales Inst. Fourier. 1957. Vol. 7. P. 1.
2. Ф а л а л е е в М. В., Г р а ж д а н ц е в а Е. Ю. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 769.

Поступила в редакцию 19.11.09.

Юрий Микиртычевич Вувуникян – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций, функционального анализа и прикладной математики ГрГУ им. Янки Купалы.