Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника (1987).

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА–ФРЕДГОЛЬМА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И L^p–НЕПРЕРЫВНЫМИ И L^p–ОГРАНИЧЕННЫМИ ЯДРАМИ

Е. В. Фролова, С. А. Фролов (Липецк, Россия)

Различные задачи математической физики, механики сплошных сред, теории упругости приводятся к уравнениям с частными интегралами

$$x = Kx + f,$$

где $K = L + M + N$ — оператор Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами, операторы L, M, N определяются равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau,\ (Mx)(t,s) = \int_c^{+\infty} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^t \int_c^{+\infty} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau;$$

$t,\tau \in [a,+\infty), s,\sigma \in [c,+\infty)$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть $\Omega \in \big\{[a,+\infty),[c,+\infty), D = [a,+\infty)\times[c,+\infty)\big\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется L^p–непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot) - u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и L^p– ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq U < \infty$.

Теорема. Оператор K с L^p– непрерывными и L^p– ограниченными ядрами l,m,n действует и непрерывен в пространстве $C(L^p(D))$ равномерно непрерывных и ограниченных на D функций со значениями в $L^p(D)$. Если дополнительно существуют такие числа q,v, что при $t > q$, $s > v$ $\|l(t,s,\cdot)\|_{L^p([a,\infty))} \leq \varepsilon$, $\|n(t,s,\cdot,\cdot)\|_{L^p(D)} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon < 1$, а оператор $I - M$ имеет обратный вида

$$(I-M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_c^{+\infty} r_m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

где r_m — резольвентное ядро оператора M, определяемое аналогично [1], то уравнение $x = Kx + f$ равносильно в $C(D)$ уравнению

$$x(t,s) = g(t,s) + \int_a^t \int_c^{+\infty} h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau,$$

где $h(t,s,\tau,\sigma)$ — L^p–непрерывное и L^p–ограниченное ядро оператора $H = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(LM+N)$, а $g = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$. При этом исходное уравнение однозначно разрешимо в $C(D)$, и его решение имеет вид

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^t r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)\,d\tau + \int_c^{+\infty} r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)\,d\sigma +$$

$$\int_a^t \int_c^{+\infty} r(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

где r_1, r_2, r — L^p–непрерывные и L^p–ограниченные резольвентные ядра оператора K.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–41–480002).

Литература

1. *Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. –теория (Издание 2-е).* Липецк (2015).

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ТРЕХ ФУНКЦИЙ С ТРЕМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Л. А. Хвощинская, Т. Н. Жоровина (Минск, Беларусь)

Рассмотрена задача определения системы трех функций $Y(z) = (y_1, y_2, y_3)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением трех точек $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$, при обходе вокруг которых функция $Y(z)$ испытывает линейные преобразования с помощью постоянных невырожденных матриц V_1, V_2, V_3 третьего порядка, образующих группу монодромии, $V_1V_2V_3 = E$.

Обозначив характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 1, 2, 3$, найдем числа $\rho_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $\omega_k = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k$; $\mathrm{Re}\rho_k, \mathrm{Re}\sigma_k, \mathrm{Re}\omega_k \in (-1, 0]$, $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{3}(\rho_k + \sigma_k + \omega_k)$, $\rho = -\rho_3 + \left[\dfrac{2-\Delta}{3}\right]$, $\sigma = 1 - \sigma_3 + \left[\dfrac{1-\Delta}{3}\right]$, $\omega = 2 - \omega_3 + \left[\dfrac{-\Delta}{3}\right]$. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathrm{Re}\rho_3 \leqslant \mathrm{Re}\sigma_3 \leqslant \mathrm{Re}\omega_3$. Обозначим $s_k = \rho_k + \sigma_k + \omega_k$, $r_k = \rho_k\sigma_k + \sigma_k\omega_k + \rho_k\omega_k$, $d_k = \rho_k\sigma_k\omega_k$, $k = 1, 2$.

Исследования показали, что матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} y_1 & z(z-1)y_1' & z^2(z-1)^2y_1'' \\ y_2 & z(z-1)y_2' & z^2(z-1)^2y_2'' \\ y_3 & z(z-1)y_3' & z^2(z-1)^2y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho z & \rho z(\sigma z + \rho - \sigma + 1) \\ 0 & 1 & z(\rho + \sigma + 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

является канонической и удовлетворяет дифференциальному уравнению Фукса

$$\frac{dX}{dz} = X\left(\frac{U_1}{z-a_1} + \frac{U_2}{z-a_2}\right), \tag{1}$$

дифференциальные матрицы U_1, U_2 которого найдены в явном виде. Матрица $U_1 + U_2$ является треугольной и с помощью преобразования подобия треугольной матрицей C приводится к диагональному виду с элементами диагонали ρ, σ, ω. Умножая обе части уравнения (1) справа на матрицу C и соответственно преобразуя матрицы U_1 и U_2, получили следующий результат.

Теорема. Пусть V_1, V_2, V_3 — матрицы монодромии проблемы Римана для трех функций с тремя особыми точками $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Тогда каноническая матрица $X(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) с дифференциальными матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} \rho & cu_{12} & c^2u_{13} \\ -1/c & u_{22} & cu_{23} \\ 0 & -1/c & u_{33} \end{pmatrix}, \; U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -cu_{12} & -c^2u_{13} \\ 1/c & \sigma - u_{22} & -cu_{23} \\ 0 & 1/c & \omega - u_{33} \end{pmatrix},$$

где $u_{22} = \dfrac{\rho(s_2-\omega) - \sigma(s_1-\omega) + r_1 - r_2}{\omega - \sigma}$, $u_{33} = \dfrac{\omega(s_2-\sigma) - \rho(s_1-\sigma) - r_1 + r_2}{\omega - \sigma}$,
$u_{12} = \dfrac{d_2 - (\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)(\rho-\omega_1)}{\sigma - \rho}$, $u_{13} = u_{12}(\omega - s_{33}) - d_2$, $u_{23} = r_2 - u_{12} - (\sigma - s_{22})(\omega - s_{33})$.