

коэффициент капиталоемкости прироста доходов, связывающий объем инвестиций $I(t)$ и скорость изменения дохода

$$I(t) = B(D_{0+}^\alpha Y)(t). \quad (2)$$

В этой модели $(D_{0+}^\alpha Y)(t)$ — дробная производная Джрбашьяна-Капуто нецелого порядка α , $0 < \alpha < 2$:

$$(D_{0+}^\alpha Y)(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - m}} \quad (3)$$

где $m = 0$, если $0 < \alpha < 1$, и $m = 1$ если $1 < \alpha < 2$.

В докладе обсуждается возможность использования в обобщенной модели аппроксимации Летникова, т.е. замены в уравнении (1) дробной производной (3) на следующее выражение

$$\Delta^\alpha(t) = - \sum_{j=0}^m \frac{Y^{(j)}(0)t^{m-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} +$$

$$+ \frac{Y(t) - \binom{\alpha}{1} Y(t-h) + \binom{\alpha}{2} Y(t-2h) - \dots + \binom{\alpha}{n} Y(t-nh)}{h^\alpha}.$$

В данной формуле t — момент времени, для которого прогнозируется значение дохода, зависящее от уровня потребления, а также от предыдущих значений дохода в моменты $t-h, t-2h, \dots, t-nh = 0$ (конечная память).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант Ф20Р-083.

Литература

1. Тарасов В.Е., Тарасова В.В. Эффекты памяти в эрдитарной модели Харрода-Домара. *Пробл. совр. науки и образ.* Т. 32 (2016), 38–44.
2. Rogosin S., Dubatovskaya M. A Survey on Two Prominent Constructions of Fractional Derivatives. *Mathematics*. Vol. 6 (1), 3 (2018).

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В $\mathbb{R}_n$

Н. И. Трусова (Липецк, Россия)

Пусть $D = D_\alpha^{(m)} \times D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)}$. Частно-интегральным оператором является оператор (см. [1, 2]) $(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha$, где $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$, m — размерность области интегрирования. Этот оператор рассматривается в пространстве функций $C(D_\gamma^{(n_1)}; L_p(D_\beta^{(n_2)}))$ со смешанной нормой вида

$$\|f\|_{C(D_\gamma^{(n_1)}; L_p(D_\beta^{(n_2)}))} = \sup_{x_\gamma \in D_\gamma^{(n_1)}} \left(\int_{D_\beta^{(n_2)}} |f(x_\gamma, x_\beta)|^p dx_\beta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Здесь мультииндексы γ (размерности n_1) и β (размерности n_2) не совпадают и $n_1 + n_2 = n$.

Критерии ограниченного действия для функций $u = u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$.

1. По переменным частного интегрирования t_α функция u должна иметь конечную L_p -норму.
2. По тем из свободных переменных, по которым применяется норма Лебега (не совпадающих с переменными частного интеграла), функция u должна иметь конечную L_{p^2} -норму.
3. По оставшимся свободным переменным функция u должна иметь конечную $\sup$ -норму.

Критерии ограниченного действия для ядер $k_\alpha = k_\alpha(x; t_\alpha)$.

1. По переменным частного интегрирования t_α ядро k_α должно иметь конечную L_q -норму.
2. По тем из свободных переменных, по которым применяется норма Лебега и номера которых совпадают с номерами переменных частного интеграла, ядро k_α должно иметь конечную L_{pq} -норму.
3. По оставшимся свободным переменным ядро k_α должно иметь конечную $\sup$ -норму.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19-41-480002).

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*. New York: Marcel Dekker (2000).
2. Ляхов Л.Н., Трусова Н.И. Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой. II. *Челябинский физико-математический журнал*. Челябинск: ЧелГ. Т. 5, вып. 3. (2020), 293–304.

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ М. М. Туров, В. Е. Федоров (Челябинск, Россия)

Пусть D_t^β — дробная производная Римана–Лиувилля [1, §2.3], $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$. Рассмотрим задачу типа Коши для уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{s=1}^{m-1} A_s D_t^{\alpha-m+s} z(t) + \sum_{j=1}^n B_j D_t^{\alpha_j} z(t) + \sum_{l=1}^r C_l J_t^{\beta_l} z(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha-m+k} z(0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m^* - 1, \quad D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \\ k &= m^*, m^* + 1, \dots, m - 1, \quad D_t^\gamma z(0) = 0, \quad \gamma \in \Lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m - 1 < \alpha \leq m$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\underline{\alpha} := \max\{\alpha_j : j \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_j - m_j < \alpha - m\}$, $\alpha_j - m_j \neq \alpha - m$, $\underline{m} = [\underline{\alpha}]$, $\bar{\alpha} := \max\{\alpha_j : j \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_j - m_j > \alpha - m\}$, $\bar{m} = [\bar{\alpha}]$, $m^* := \max\{\underline{m} - 1, \bar{m}\}$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n > 0$, $A_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, m - 1$, $B_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, n$, $C_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1$, $\Lambda = \{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 2, \dots, \alpha_1 - m_1, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 2, \dots, \alpha_n - m_n\}$ — множество из которого выброшены повторяющиеся числа, а также совпадающие с одним из чисел $\alpha - 1, \alpha - 2, \dots, \alpha - m$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$, что $J_t^{m_j - \alpha_j} z \in C^{m_j}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap C^{m_j - 1}(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, n$, $J_t^{m - \alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap C^{m - 1}(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $J_t^{\beta_l} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, r$, и выполняются равенства (1) при $t \in \mathbb{R}_+$ и (2).

Теорема. С учетом введенных обозначений пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, \alpha)$ — попарно различные числа, $\alpha_1 - m_1 \leq \alpha_2 - m_2 \leq \dots \leq \alpha_n - m_n$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид $z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p$,

$$\begin{aligned} Z_p(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{s=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+s} A_s - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} B_j - \sum_{l=1}^r \lambda^{-\beta_l} C_l \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{s=p+1}^{m-1} \lambda^{s-1-p} A_s \right) e^{\lambda t} d\lambda, \end{aligned}$$

контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$, $\Gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$, $r_0 > 0$ — достаточно большое число.

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ № 21-51-54003.