

ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. Т. Сираева (Уфа, Россия)

Рассматриваются уравнения газовой динамики [1, 2]

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где $D = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет специальный вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S),$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Система (1), (2) допускает 12-мерную алгебру Ли L_{12} . Алгебра Ли расширяется за счет оператора дифференцирования по давлению $Y_1 = \partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [3].

Проведена классификация подмоделей на одномерных, двумерных и трехмерных подалгебрах. Для 4-параметрических трехмерных подалгебр из всех переносов по пространству и по давлению 12-мерной алгебры Ли вычислены инварианты, построены инвариантные подмодели ранга 1 и получены три семейства точных решений. Полученные решения задают движение частиц в пространстве с линейным полем скоростей с неоднородной деформацией.

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ (№18–29–10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№0246–2019–0052).

Литература

1. Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика. *Прикладная математика и механика*. Москва: РАН. Т. 58, вып. 4 (1994), 30–55.
2. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований (2003), 336 с.
3. Сираева Д.Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов. *Уфимский математический журнал*. Т. 6, вып. 1 (2014), 94–107.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С. М. Ситник (Белгород, Россия)

В докладе будут изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} u(x). \quad (1)$$

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [1]–[7]. Среди них особо отметим опубликованный в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* сборник работ [5] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования, а также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее

по-русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков.

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Литература

1. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. *Современная математика. Фундаментальные направления*. Т. 64, No. 2. (2018), 211–426.
2. Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические В-потенциалы. *Современная математика. Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных*. Т. 65, No. 2. (2019), 157–338.
3. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя*. М.: Физматлит (2019).
4. Shishkina E.L., Sitnik S.M. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press (2020).
5. Ed. V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. *Transmutation Operators and Applications*. In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser (2020).
6. Kravchenko V.V. *Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution*. In the Series: Frontiers in Mathematics. Springer (2020).
7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics – I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019. <https://www.math.cinvestav.mx/IWTOR>

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА В ЯДРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

С. М. Ситник (Белгород, Россия),
О. В. Скоромник (Новополоцк, Беларусь)

Рассматривается многомерное интегральное преобразование:

$$(P_{\delta,1}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0)$$

и три его модификации $P_{\delta,j}^{\gamma}f$ ($j = 2, 3, 4$). Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n; \int_0^{\mathbf{x}} := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n}; \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k; \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), 0 < \operatorname{Re}(\gamma_j) < 1, (j = \overline{1, n}); \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbf{R}^n; (\mathbf{x})^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}_+^n; \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n); d\mathbf{t} = dt_1 \dots dt_n; f(\mathbf{t}) = f(t_1, \dots, t_n); \mathbf{x} \geq \mathbf{t}$ означает $x_1 \geq t_1, \dots, x_n \geq t_n; P_{\delta}^{\gamma}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j)$, где $P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j)$ ($j = \overline{1, n}$) — функции Лежандра первого рода [1; 2].

С помощью формулы многомерного преобразования Меллина [2, формула 1.4.42] от $P_{\delta,j}^{\gamma}f$ ($j = 1, 2, 3, 4$) доказывается, что эти преобразования являются многомерными специальными H -преобразованиями [3, глава 5; 5]. На основании этого в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbf{R}_+^n$, для которых: $\|f\|_{\bar{v}, \bar{r}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_n^{v_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{v_2 \cdot r_2 - 1} \times \right. \right. \right.$
 $\times \left. \left. \left. \left[\int_{R_+^1} x_1^{v_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\} \dots \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty,$
 $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^n, (1 \leq \bar{r} < \infty), r_1 = \dots = r_n, \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n, v_1 = \dots = v_n.$