

КОНСЕРВАТИВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ В. К. Полевиков (Минск, Беларусь)

Рассматривается двумерное стационарное уравнение конвекции-диффузии дивергентного вида

$$\nabla \cdot (\nabla u - \mathbf{r}u) = -f; \quad \nabla \cdot \mathbf{r} \geq 0, \quad (1)$$

где $u = u(x)$ — искомая функция, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $r_\alpha = r_\alpha(x)$, $f = f(x)$ — заданные коэффициенты, $x = (x_1, x_2)$. Все функции в уравнении (1) предполагаются достаточно гладкими. Уравнениями вида (1) описываются конвективные и диффузионные процессы в жидкостях и коллоидах, например, процесс магнитофореза наночастиц в магнитной жидкости [1].

В работах [1, 2] описана, детально обоснована теоретически, а также апробирована путем численного исследования высокоинтенсивной гравитационной конвекции в горизонтальном канале квадратного сечения неконсервативная монотонная разностная схема четвертого порядка аппроксимации, построенная для недивергентного аналога уравнения (1). Показано, что монотонные схемы повышенного порядка точности наиболее эффективны при решении задач конвекции и диффузии с большими градиентами скорости, температуры и концентрации частиц, поскольку в отличие от схем первого и второго порядков позволяют добиваться приемлемой точности на достаточно грубых сетках.

Основная цель данной работы — построение консервативной монотонной схемы четвертого порядка аппроксимации для уравнения (1), которая в отличие от схемы, представленной в [1, 2], удовлетворяет разностным аналогам физических законов сохранения на сколь угодно больших и на сколь угодно малых участках сеточной области. Консервативность схемы достигается по методу контрольного объема, когда вместо дифференциального уравнения аппроксимации на сетке подвергается соответствующее ему интегральное уравнение баланса. Чтобы удовлетворить условиям принципа максимума в алгоритм вводятся параметры регуляризации, благодаря которым обеспечивается устойчивость разностной схемы при сохранении ее порядка аппроксимации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция-2025”, подпрограмма «Математические модели и методы», шифр задания 1.4.01.4.

Литература

1. *Polevnikov V.K.* A monotone finite-difference high order accuracy scheme for the 2D convection-diffusion equations. *J. of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* No. 3 (2019), 71–83.
2. *Берковский Б.М., Полевиков В.К.* *Вычислительный эксперимент в конвекции.* Минск: Университетское (1988).

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ С. В. Пономарева (Минск, Беларусь)

Исследуется задача типа Коши

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi \end{cases} \quad (1)$$

с дробной производной Римана–Лиувилля D^α порядка α , $0 < \alpha < 1$ в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ определенных на отрезке $[0, T]$ и непрерывных на $(0, T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t)$.

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \leq \mu(t) + \nu(t) g(u) \quad (0 < t \leq T, \quad -\infty < u < \infty),$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — некоторые неотрицательные функции со свойствами

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \in C_{1-\alpha}, \quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} \nu(s) ds \in C_{1-\alpha},$$

обеспечивающими ограниченность и полную непрерывность оператора $Ax(t) = \frac{\xi \cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$ в пространстве $C_{1-\alpha}$ (к отысканию неподвижных точек которого сводится решение задачи), $g(u)$ — некоторая неотрицательная непрерывная на соответствующем отрезке функция.

Устанавливаются условия существования решения задачи (1) с правыми частями, имеющими любой (в рамках непрерывности) характер нелинейности, что обобщает результаты, полученные в [1] и [2].

При этом можно доказать лишь локальную разрешимость, т. е. длина отрезка, на котором доказывается существование решения, зависит от функции в правой части (1), и поэтому глобального решения может и не быть.

Теорема 1. Пусть для функции $f(t, u)$ выполняется ограничение $|f(t, u)| \leq \mu(t) + \nu(t) g(u)$. Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in \mathbb{R}$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C_{1-\alpha}$.

Доказательство основано на том, что на конечном отрезке для любой непрерывной функции может быть найдена степенная мажоранта, а также на доказательстве теоремы [2, т. 1].

Литература

1. Забрейко, П.П., Пономарева С.В. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. Т. 62, №4 (2018), 391–397.
2. Забрейко, П.П., Пономарева С.В. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. Т. 64, №1 (2020), 13–20.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ИНВАРИАНТА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь)

Теория интегральных инвариантов была заложена А. Пуанкаре в мемуаре «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» и позднее изложена им в расширенном виде в книге «Новые методы небесной механики» [1]. Дальнейшее развитие этой тематики связано с работами Э. Картана [2]. Современное состояние теории интегральных инвариантов и обзор научной литературы по этому направлению приведены академиком В.В. Козловым в монографии [3].

Данная работа продолжает исследования [4] по изучению существования интегральных инвариантов у систем уравнений в полных дифференциалах [5]

$$dx_i = \sum_{j=1}^m X_{ij}(t, x) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и решает задачу о существовании полного интегрального инварианта

$$I_n = \int_{V^n} \mu(t, x) \delta x_1 \wedge \dots \wedge \delta x_n, \quad \mu \in C^1(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{m+n}, \quad (2)$$