

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ПАРАМЕТРОМ

И РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Н. Павленко (Челябинск, Россия),

Д. К. Потапов (Санкт-Петербург, Россия)

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класса $C^{1,1}$ рассматривается задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с параметром $\lambda \geq 0$ и разрывной нелинейностью $g(x, u)$ следующего вида:

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x))u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, u(x), \nabla u(x))u_{x_i} + a(x, u(x))u = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Теорема. Предположим, что $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t)$ на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, существует невозрастающая положительная на $\mathbb{R}_+$ функция $\lambda(t)$ такая, что для любых $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ справедливо $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geq \lambda(|t|) \cdot |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x, t)$ и $a(x, t)$ непрерывно дифференцируемые на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, $b_i(x, t, \eta)$ непрерывно дифференцируемые на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a(x, t) \geq 0$ на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, $g(x, t)$ борелева (mod 0) на $\Omega \times \mathbb{R}$, существуют неубывающая на $\mathbb{R}_+$ положительная функция $\psi(t)$ и функция $d \in L_p(\Omega)$ ($p > n$) такие, что для почти всех $x \in \Omega$ верно $|g(x, t)| \leq d(x) + \psi(|t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, для некоторой положительной на Ω функции $\beta(x)$ верно $g(x, t) \geq \beta(x)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$, и для почти всех $x \in \Omega$ справедливо $g(x, t) \in [g_-(x, t), g_+(x, t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Тогда задача (1)–(2) имеет континуум обобщенных положительных решений, соединяющий $(0, 0)$ и ∞ , в пространстве $\mathbb{R} \times C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < (p - n)/p$, $p > n$. Если дополнительно существует множество $\omega \subset \Omega$ нулевой меры Лебега такое, что множество $\bigcup_{x \in \Omega \setminus \omega} \{u \in \mathbb{R} : g_-(x, u) \neq g_+(x, u)\}$ имеет меру нуль и $a(x, t) \equiv 0$ на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, то все обобщенные решения задачи (1)–(2) являются полуправильными.

Схема доказательства. Теорема доказывается топологическим методом. Доказательство существования континуума положительных решений, соединяющего $(0, 0)$ и ∞ , сводится к проверке выполнения условий теоремы 2.12 из [1]. При доказательстве полуправильности обобщенных решений используется аналог теоремы 6 из [2]. По сравнению с [1, 2] ослаблены ограничения на нелинейность $g(x, u)$.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20–41–740003.

Литература

1. Chang K.-C. Free boundary problems and the set-valued mappings. *J. Differ. Equ.* 49:1 (1983), 1–28.
2. Kuiper H.J. Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 53:2 (1974), 178–186.

СВОЙСТВА h -ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. А. Павловский (Минск, Беларусь)

Обозначим через $\mathbb{C}_h$ — кольцо h -комплексных (двойных) чисел [1] вида $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ с нормой $\|z\| = |x| + |y|$. Пусть $\mathcal{H}_h(D)$ — множество функций h -голоморфных [2] на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ дважды непрерывно h -дифференцируема в интервале (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда естественным множеством h -

голоморфности функции f при $|a|, |b| < +\infty$ является открытый h -круг

$$D(f) = \left\{ \|z - z_0\| < \frac{(b-a)}{2}, z_0 = \left(\frac{a+b}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Если $b = +\infty$, то

$$D(f) = \{z \in \mathbb{C}_h \mid -x + a < y < x - a\}.$$

Если $a = -\infty$, то

$$D(f) = \{z \in \mathbb{C}_h \mid x - b < y < -x + b\}.$$

При $a = -\infty, b = +\infty$ получаем

$$D(f) = \mathbb{C}_h.$$

Связную внутренность компактного множества, ограниченного замкнутой ломаной, образованной конечным числом отрезков, параллельных прямым $y = x$ или $y = -x$, назовем *стандартной областью*.

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂D , $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ её исчерпание стандартными областями, $f \in \mathcal{H}_h(D_k) \forall k$. Тогда

1. $f(D_k) \subset f(D_m)$ при $k < m$,
2. $f(D) = f\left(\bigcup_{k=1}^\infty D_k\right) = \bigcup_{k=1}^\infty f(D_k)$,
3. $f \in \mathcal{H}_h(D)$,
4. Если для всех $k = 1, 2, \dots$ $E_k = f(D_k)$ — область, то $E = f(D)$ — область и $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ её исчерпание стандартными областями.

Литература

1. Павловский В.А. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h -комплексных чисел. *Вестн БДПУ*. Сер. 3. No. 4 (2020), 25–31.
2. Pavlovsky V.A., Vasiliev I.L. On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable. *Bulletin of L.N. Gumilyov ENU*. Mathematics. Computer science. Mechanics series. Vol. 133. No. 4 (2020), 19–27.

ON DECAY OF ENTROPY SOLUTIONS TO DEGENERATE NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS E. Yu. Panov (Veliky Novgorod, Russia)

In the half-space $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ we consider the nonlinear parabolic equation

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \quad (3)$$

where the flux vector $\varphi(u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, and the diffusion matrix $a(u) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ is symmetric and nonnegative definite. Since this matrix may have nontrivial kernel, (3) is a degenerate (parabolic-hyperbolic) equation. In the particular case $a \equiv 0$ it reduces to a first order conservation law $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0$. Let $u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ be an entropy solution (in the sense of [1]) of the Cauchy problem for equation (3) with the “perturbed periodic” initial function $u(0, x) = p(x) + v(x)$, where $p(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ is a periodic function with the group of periods

$$G = \{e \in \mathbb{R}^n \mid p(x+e) = p(x) \text{ a.e. in } \mathbb{R}^n\}$$

and with the mean value m while the “perturbation” $v(x)$ lies in the space $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ consisting of functions $v = v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that the sets $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |v(x)| > \varepsilon\}$ have finite measure for all $\varepsilon > 0$. Let G' be the dual group to the group of periods, it is a lattice in the orthogonal complement