Литература

1. *Савчук В.П., Медведев Д.Г., Вярвильская О.Н. Теоретическая механика.* Минск: БГУ (2016).

2. *Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики.* Москва: Наука (1969).

3. *Снеддон Н. Преобразования Фурье.* Москва: ИнЛит (1955).

ВЛОЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Р. Ф. Никонорова (Уфа, Россия)

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа [1]

$$\begin{aligned} &D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ &DS = 0,\, p = f(S)\rho^{\frac{5}{3}}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия. Все зависимые переменные есть функции времени t и декартовых координат $\vec{x} = (x, y, z)$.

Система (1) допускает 14-мерную алгебру Ли операторов. Особенностью модели движения одноатомного газа является то, что алгебра Ли содержит проективный оператор $X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр 14-мерной алгебры Ли построена в работе [2] (содержит 1827 представителей).

Из оптимальной системы подалгебр выбраны подалгебры, содержащие проективный оператор X_{12}. Полученная система записана в компактном виде, включающем 73 подалгебры [3]. Все они вложены друг в друга — построен граф вложенных подалгебр, состоящий из 6 фрагментов. Для подалгебр малой размерности (1-4) построены инвариантные подмодели. Выбран подграф с четырехмерной вершиной, для него показана иерархия вложенных подмоделей [4]. Так, если подалгебра вложена в надалгебру большей размерности, то инвариантная подмодель надалгебры задает семейство точных решений инвариантной подмодели подалгебры. Для некоторых подмоделей получены интегралы и найдены частные решения. Полученные решения исследованы, описано движение частиц газа в физическом пространстве.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (№18–29–10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№0246–2019–0052).

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. *Прикладная математика и механика.* Т. 58, №4. (1994), 30—55.

2. *Черевко А.А.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{\frac{5}{3}}$. Новосибирск, 1996. (*Препринт/ Институт гидродинамики СО РАН. № 4*).

3. *Шаяхметова Р.Ф.* Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа. *Сибирские электронные математические известия.* Т. 11. (2014), 605–625.

4. *Хабиров С.В.* Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений. *Сибирский математический журнал.* Т. 54, №6. (2013), 1396–1406.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. А. Нифагин (Минск, Беларусь)

Краевые задачи для распространяющихся в упругопластической среде трещин обладают рядом принципиальных отличий модели деформирования, в сравнении со стационарным случаем. Это объясняется различием траекторий нагружения в областях привершинной структуры от линейной. Построенные асимптотические решения [1] указывают на эффект снижения концентрации деформаций, а в ряде задач, и напряжения (порядка сингулярностей) в совокупности с одновременным возникновением областей разгрузки и формирования остаточных полей по берегам трещин. Кроме того, приведенная особенность имеет фундаментальное значение для нахождения удельной работы разрушения в рамках энергетических критериев. Изучение полных решений с учетом областей сверхтонкой и промежуточной структур у вершины трещины для основных режимов ее роста указывает на зависимость эффекта от вида напряженного состояния, по крайней мере, для определяющих состояний неголономного типа.

Как отмечалось [2] асимптотические решения задач теории трещин содержат определенный произвол. Так, в задачах о распространяющейся трещине имеется три характерных асимптотики. К их числу относятся показатель сингулярности, число граничных условий на разных этапах метода возмущений, и несогласованность упругопластических решений с энергетическими критериями роста трещин из-за недостаточности потока энергии в вершине трещины для покрытия затрат на образование новых поверхностей берегов. Чтобы внести определенность в указанные задачи в расчетной практике применяются энергетические инварианты различной формы. В термодинамической постановке они имеют вид:

$$J = \oint_\Gamma \left(\left(U_0 + \frac{1}{2} l^2 u_{i,x_1} \cdot u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} - q_{j,x_1} n_j \right) ds,$$

здесь U_0 — удельная внутренняя энергия, q_j — вектор теплового потока.

Приведенная формулировка включает как величины, определяемые в механической постановке, так и термодинамические параметры и функции состояния [3]. Обобщенные представления термодинамических состояний включают аддитивную постоянную, являющуюся следствием физического эффекта взаимодействия разделяемых областей среды и равную предельному значению J–интеграла для бесконечно малого контура в окрестности вершины. Применение только механического варианта J–интеграла в общем случае невозможно, поэтому необходимо различать критерии разрушения, возникающие для предельных значений этих интегралов. В то же время использование общего критерия предполагает указание термодинамической модели среды и определения в связанной постановке полей термодинамических функций и параметров состояния, таких как свободная и внутренняя энергия, энтропия и т.д. Данный подход, с учетом асимптотик разных форм, дает основу механического обосноваия феноменологического описания концепций структуры у вершины распространяющейся в упругопластическом теле трещины.

Особо отметим задачи о развитии зон разупрочнения с особенностями зависимостей внешних усилий и перемещений, когда наличие максимума соответсвует исчерпанию несущей способности тела. Что позволяет естественным образом ввести феноменологическое описание трещинообразования, но и критерий работоспособности тела. Предельная нагрузка происходит после наступления максимума напряжений на локальной диаграмме $\sigma(\varepsilon)$ в наиболее нагруженной области, и зона ослабленных связей обеспечивает запас несущей способности.

Литература

1. *Астафьев, В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.Нелинейная механика разрушения.* – Самара. Самарский ун-т., 2001, – 562 с.

2. *Нифагин В.А. Асимптотические методы в задачах теории трещин* / Saarbrücken: Lambert Academic Publishers (2016). – 125 с.

3. *Райс Д.* Математические методы в механике разрушений. // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Лейбовица. М.: Мир, (1957), 204–335.