SolidWorks 2020 (Dassault Systems, France). Граничные условия заключаются в фиксации модели в узлах, симметрично расположенных в области подбородка и мыщелков. Между элементами модели задается контакт типа Bonded. По верхней поверхности зубного протеза прикладывается распределенная статическая нагрузка в диапазоне от 48,0 Н до 480,0 Н с шагом 48,0 Н. На каждом шаге нагружения определены напряжения и деформации, возникающие в слизистой оболочке. Показано, что наибольшие напряжения возникают по контуру протеза, причем распределение напряжений несимметрично. Полученные результаты могут быть использованы стоматологами-ортопедами для проектирования зубных протезов, а также для прогнозирования количества несущих имплантатов и их локализации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта Ф20Р–083 БРФФИ – РФФИ.

Литература

1. *Moldoveanu S.A.B., Munteanu F., Forna N.C.* Impact of implant-retained mandibular overdenure on oral mucosa — a finite element analysis. *Romanian J. Oral Rehabilitation.* **12** (2020), 6–12.

2. *Kasani R., Rama Sai Attili B.K., Dommeti V.K., Merdji A., Biswas J.K., Roy S.* Stress distribution of overdenture using odd number implants — a finite element study. *J. Mech. Behav. Biomed. Mat.* **98** (2019), 369–382.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ШАХТНОГО ПОДЪЕМНОГО СОСУДА

М. А. Николайчик, М. А. Журавков (Минск, Беларусь)

Рассматривается задача исследования динамики подъемного сосуда шахтной подъемной установки. При моделировании движения подъемного сосуда (скипа) используется теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента:

$$M\vec{W}_c = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \sum_{i=0}^{5} C\vec{M}_i \times \vec{F}_i. \tag{2}$$

В данных уравнениях M — масса груженного подъемного сосуда; $\vec{W}_c$ — вектор ускорения центра масс подъемного сосуда; $\vec{F}_i$ — силы горизонтального взаимодействия в 4-ех точках контакта скипа и направляющих при его движении, а также в точках сопряжения с головным и хвостовым канатами; $\vec{K}_c$ — кинетический момент скипа относительно системы координат связанной с его центром масс (репер Кенига [1]).

Применяя асимптотический метод усреднения [2] и интегральные преобразования Лапласа [3], получены выражения для определения сил контактного взаимодействия подъемного сосуда и направляющих проводников. Также, предусмотрена возможность нахождения величин главного вектора и главного момента сил, действующих на подъемный сосуд по известным величинам ускорений двух его точек.

В результате выполненных исследований разработана приближенная аналитическая модель движения шахтного скипа, учитывающая ряд конструктивных особенностей, характерных для шахтных стволов. Проведенный анализ собственных частот колебаний позволяет определить диаграмму скорости движения подъемного сосуда, не вызывающего возникновение вертикальных колебаний скипа на упругом канате.

Благодарности. Работа выполнена в рамках НИР №756/21 “Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники”, ГПНИ “Конвергенция”, задание 1.8.01.1.

Литература

1. *Савчук В.П., Медведев Д.Г., Вярвильская О.Н. Теоретическая механика.* Минск: БГУ (2016).

2. *Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики.* Москва: Наука (1969).

3. *Снеддон Н. Преобразования Фурье.* Москва: ИнЛит (1955).

ВЛОЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Р. Ф. Никонорова (Уфа, Россия)

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа [1]

$$\begin{gathered} D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \\ D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \\ DS = 0,\, p = f(S)\rho^{\frac{5}{3}}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия. Все зависимые переменные есть функции времени t и декартовых координат $\vec{x} = (x, y, z)$.

Система (1) допускает 14-мерную алгебру Ли операторов. Особенностью модели движения одноатомного газа является то, что алгебра Ли содержит проективный оператор $X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр 14-мерной алгебры Ли построена в работе [2] (содержит 1827 представителей).

Из оптимальной системы подалгебр выбраны подалгебры, содержащие проективный оператор X_{12}. Полученная система записана в компактном виде, включающем 73 подалгебры [3]. Все они вложены друг в друга — построен граф вложенных подалгебр, состоящий из 6 фрагментов. Для подалгебр малой размерности (1-4) построены инвариантные подмодели. Выбран подграф с четырехмерной вершиной, для него показана иерархия вложенных подмоделей [4]. Так, если подалгебра вложена в надалгебру большей размерности, то инвариантная подмодель надалгебры задает семейство точных решений инвариантной подмодели подалгебры. Для некоторых подмоделей получены интегралы и найдены частные решения. Полученные решения исследованы, описано движение частиц газа в физическом пространстве.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (№18–29–10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№0246–2019–0052).

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. *Прикладная математика и механика.* Т. 58, №4. (1994), 30—55.

2. *Черевко А.А.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{\frac{5}{3}}$. Новосибирск, 1996. (*Препринт/ Институт гидродинамики СО РАН. № 4*).

3. *Шаяхметова Р.Ф.* Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа. *Сибирские электронные математические известия.* Т. 11. (2014), 605–625.

4. *Хабиров С.В.* Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений. *Сибирский математический журнал.* Т. 54, №6. (2013), 1396–1406.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. А. Нифагин (Минск, Беларусь)

Краевые задачи для распространяющихся в упругопластической среде трещин обладают рядом принципиальных отличий модели деформирования, в сравнении со стационарным случаем. Это объясняется различием траекторий нагружения в областях привершинной структуры