

Допустимые возмущения искали среди возмущений вида:

$$\Delta \cdot \alpha(t) = \left(\sum_{i+j+k=0}^n q_{ijk} x^i y^j z^k \quad \sum_{i+j+k=0}^n r_{ijk} x^i y^j z^k \quad \sum_{i+j+k=0}^n s_{ijk} x^i y^j z^k \right)^T \alpha(t),$$

где $q_{ijk}, r_{ijk}, s_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная скалярная нечётная функция.

Теорема 1. При $d = a$ и $b = c = e = 0$ отражающая функция системы (1) совпадает с отражающей функцией системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a+z)(1+\alpha_1(t)) + y(\alpha_2(t)), \\ \dot{y} &= y(a+z)(1+\alpha_1(t)) - x(\alpha_2(t)), \\ \dot{z} &= -(x^2 + y^2 + z^2)(1+\alpha_1(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$ — произвольные скалярные непрерывные нечётные функции.

Утверждение теоремы доказывается с помощью теоремы 1 [6] последовательной проверкой тождества $\frac{\partial \Delta}{\partial t} \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta = 0$ для каждого вектор-множителя Δ при $\alpha_i(t)$. ■

Литература

1. Yang Q., Yang T. Complex dynamics in a generalized Langford system. *Nonlinear Dynamics*. Vol. 91 (2018), 2241–2270.
2. МIRONENKO В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины (2004).
3. Мусафиров Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing (2011).
4. Мусафиров Э.В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда. *Проблемы физики, математики и техники*. No. 3 (2016), 47–51.
5. Musafirov E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function. *International journal of bifurcation and chaos*. Vol. 27, No. 10 (2017), 1750154.
6. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems. *Applied Mathematics Letters*. Vol. 22, No. 9 (2009), 1356–1359.

РЕАКЦИЯ НИЖНЕЙ ЧЕЛЮСТИ С УСТАНОВЛЕННЫМ ЗУБНЫМ ПРОТЕЗОМ НА ОККЛЮЗИОННУЮ НАГРУЗКУ

Д. В. Назаренко, С. М. Босяков, П. П. Мулик,
С. П. Рубникович (Минск, Беларусь)

При полном отсутствии зубов нижней челюсти эффективное восстановление жевательной функции возможно с использованием съемных протезов с фиксацией на имплантатах. В то же время, при постоянной окклюзионной нагрузке имеет место вращательное движение протеза, которое может привести к снижению жевательной функции и к существенному воздействию на слизистую оболочку нижней челюсти. Поэтому актуальным является вопрос о количестве имплантатов, которое следует использовать при установке протеза, чтобы обеспечить низкий уровень напряжений в слизистой оболочке и костной ткани, а также удержание протеза. Целью настоящей работы является определение напряженно-деформированного состояния нижней челюсти при действии сосредоточенной нагрузки на окклюзионную поверхность зубного протеза, зафиксированного на двух сферических имплантатах.

Для построения твердотельной модели нижней челюсти и зубочелюстного протеза использовались соответствующие данные компьютерной томографии. Обработка данных осуществлялась в пакете Mimics 13 (Materialise, Leuven, Belgium) с учетом губчатой и кортикальной костной ткани, а также слизистой оболочки. В среднем толщина слизистой оболочки составляет 3,0 мм. Моделирование имплантатов со сферическим соединением выполнено в пакете

SolidWorks 2020 (Dassault Systems, France). Граничные условия заключаются в фиксации модели в узлах, симметрично расположенных в области подбородка и мышечков. Между элементами модели задается контакт типа Bonded. По верхней поверхности зубного протеза прикладывается распределенная статическая нагрузка в диапазоне от 48,0 Н до 480,0 Н с шагом 48,0 Н. На каждом шаге нагружения определены напряжения и деформации, возникающие в слизистой оболочке. Показано, что наибольшие напряжения возникают по контуру протеза, причем распределение напряжений несимметрично. Полученные результаты могут быть использованы стоматологами-ортопедами для проектирования зубных протезов, а также для прогнозирования количества несущих имплантатов и их локализации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта Ф20Р–083 БРФФИ – РФФИ.

Литература

1. *Moldoveanu S.A.B., Munteanu F., Forna N.C.* Impact of implant-retained mandibular overdenture on oral mucosa — a finite element analysis. *Romanian J. Oral Rehabilitation*. **12** (2020), 6–12.
2. *Kasani R., Rama Sai Attili B.K., Dommeti V.K., Merdji A., Biswas J.K., Roy S.* Stress distribution of overdenture using odd number implants — a finite element study. *J. Mech. Behav. Biomed. Mat.* **98** (2019), 369–382.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ШАХТНОГО ПОДЪЕМНОГО СОСУДА М. А. Николайчик, М. А. Журавков (Минск, Беларусь)

Рассматривается задача исследования динамики подъемного сосуда шахтной подъемной установки. При моделировании движения подъемного сосуда (скипа) используется теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента:

$$M\vec{W}_c = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \sum_{i=0}^5 C\vec{M}_i \times \vec{F}_i. \quad (2)$$

В данных уравнениях M — масса груженного подъемного сосуда; $\vec{W}_c$ — вектор ускорения центра масс подъемного сосуда; $\vec{F}_i$ — силы горизонтального взаимодействия в 4-ех точках контакта скипа и направляющих при его движении, а также в точках сопряжения с головным и хвостовым канатами; $\vec{K}_c$ — кинетический момент скипа относительно системы координат связанной с его центром масс (репер Кенига [1]).

Применяя асимптотический метод усреднения [2] и интегральные преобразования Лапласа [3], получены выражения для определения сил контактного взаимодействия подъемного сосуда и направляющих проводников. Также, предусмотрена возможность нахождения величин главного вектора и главного момента сил, действующих на подъемный сосуд по известным величинам ускорений двух его точек.

В результате выполненных исследований разработана приближенная аналитическая модель движения шахтного скипа, учитывающая ряд конструктивных особенностей, характерных для шахтных стволов. Проведенный анализ собственных частот колебаний позволяет определить диаграмму скорости движения подъемного сосуда, не вызывающего возникновение вертикальных колебаний скипа на упругом канате.

Благодарности. Работа выполнена в рамках НИР №756/21 “Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники”, ГПНИ “Конвергенция”, задание 1.8.01.1.