ON EQUATIONS FOR THIN ELASTIC NANOSIZE STRIP TAKING INTO ACCOUNT NONLOCAL EFFECTS IN THICKNESS DIRECTION

G. I. Mikhasev (Minsk, Belarus)

A plane isotropic elastic strip of thickness h and length l with a traction-free faces is considered. It is assumed that $\varepsilon = h/l$ and $\varepsilon_1 = a/h$ are small parameters, where a is the internal characteristic dimension of the nanosize strip in the thickness direction. Vibrations of the plane strip are governed by equations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_1(x,t) = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_3(x,t) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

written in the dimensionless form. Here u, w are the longitudinal and transverse displacements in the x- and z-directions ($0 \le x \le l, 0 \le z \le 1$) respectively, ρ is the density, f_k are the volume forces, and σ_{ij} are stresses coupled to the macroscopic counterparts $\sigma_{ij}^{(m)}$ by means of relations [1]:

$$\sigma_{ij} - \varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial z^2} = \sigma_{ij}^{(m)} - \varepsilon_1^2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{(m)}}{\partial z^2}, \tag{2}$$

where ξ is the local volume fraction in the Eringen's two-phase nonlocal theory of elasticity.

Assuming that $w \sim \varepsilon^{-4}$, $u \sim \varepsilon^{-3}$, $\sigma_{13} \sim \varepsilon^{-1}$, $\sigma_{33} \sim 1$ [2], and $\varepsilon_1^2 = \varepsilon\kappa$, where $\kappa \sim 1$, all required functions in (1) are expended into series by a small parameter ε. In particular, $w = \varepsilon^{-4} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k$. Considering step-by-step the sequence of arising boundary-value problems, we derive the sequence of partial differential equations for the functions $W_k(x,z,t)$. We detected that the partial differential equation for $W_0(x,t)$ is the classical beam equation, the differential equation for $W_0 + \varepsilon^2 W_2(x,z,t)$, taking into account shears, looks like the Timoshenko–Reissner one [2], while a differential equation for $W_0 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3(x,z,t)$ is a new equation accounting additionally for the nonlocality effect in the thickness direction.

References

1. *Mikhasev G.I., Nobili A.* On the solution of the purely nonlocal theory of beamelasticity as a limiting case of the two-phase theory. *International Journal of Solids and Structures,* vol. **190** (2020), 47–57.

2. *Tovstik P. E., Tovstik T.P.* Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM,* vol. **97** (3) (2017), 296–308.

ДОПУСТИМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ ЛЭНГФОРДА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Э. В. Мусафиров (Гродно, Беларусь)

В [1] изучена обобщённая система Лэнгфорда:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + xz, \\ \dot{y} &= cx + dy + yz, \\ \dot{z} &= ez - \left(x^2 + y^2 + z^2\right); \quad x, y, z, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, c, d, e — параметры модели.

Если к правой части системы (1) добавить допустимые возмущения, т.е. такие допущения, которые не изменяют отражающей функции системы (см. [2, 3]), то многие качественные свойства решений допустимо возмущённой системы сохранятся. Таким образом, результаты исследований системы (1) можно использовать для изучения допустимо возмущённых систем (см. [4, 5]).

Допустимые возмущения искались среди возмущений вида:

$$\Delta \cdot \alpha(t) = \left(\sum_{i+j+k=0}^{n} q_{ijk} x^i y^j z^k \quad \sum_{i+j+k=0}^{n} r_{ijk} x^i y^j z^k \quad \sum_{i+j+k=0}^{n} s_{ijk} x^i y^j z^k \right)^{\mathrm{T}} \alpha(t),$$

где $q_{ijk}, r_{ijk}, s_{ijk} \in \mathbb{R}$, $i, j, k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная скалярная нечётная функция.

Теорема 1. *При $d = a$ и $b = c = e = 0$ отражающая функция системы (1) совпадает с отражающей функцией системы*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(a+z)\left(1+\alpha_1(t)\right) + y\left(\alpha_2(t)\right), \\ \dot{y} & = & y(a+z)\left(1+\alpha_1(t)\right) - x\left(\alpha_2(t)\right), \\ \dot{z} & = & -\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+\alpha_1(t)\right), \end{array} \qquad (2)$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,2}$ — произвольные скалярные непрерывные нечётные функции.

Утверждение теоремы доказывается с помощью теоремы 1 [6] последовательной проверкой тождества $\frac{\partial \Delta}{\partial t} \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x} \Delta = 0$ для каждого вектор–множителя Δ при $\alpha_i(t)$. ■

Литература

1. *Yang Q., Yang T.* Complex dynamics in a generalized Langford system. *Nonlinear Dynamics.* Vol. 91 (2018), 2241–2270.

2. *Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины (2004).

3. *Мусафиров Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем.* Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing (2011).

4. *Мусафиров Э.В.* Допустимые возмущения системы Лэнгфорда. *Проблемы физики, математики и техники.* No. 3 (2016), 47–51.

5. *Musafirov E.V.* Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function. *International journal of bifurcation and chaos.* Vol. 27, No. 10 (2017), 1750154.

6. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* How to construct equivalent differential systems. *Applied Mathematics Letters.* Vol. 22, No. 9 (2009), 1356–1359.

РЕАКЦИЯ НИЖНЕЙ ЧЕЛЮСТИ С УСТАНОВЛЕННЫМ ЗУБНЫМ ПРОТЕЗОМ НА ОККЛЮЗИОННУЮ НАГРУЗКУ

Д. В. Назаренко, С. М. Босяков, П. П. Мулик,
С. П. Рубникович (Минск, Беларусь)

При полном отсутствии зубов нижней челюсти эффективное восстановление жевательной функции возможно с использованием съемных протезов с фиксацией на имплантатах. В то же время, при постоянной окклюзионной нагрузке имеет место вращательное движение протеза, которое может привести к снижению жевательной функции и к существенному воздействию на слизистую оболочку нижней челюсти. Поэтому актуальным является вопрос о количестве имплантатов, которое следует использовать при установке протеза, чтобы обеспечить низкий уровень напряжений в слизистой оболочке и костной ткани, а также удержание протеза. Целью настоящей работы является определение напряженно-деформированного состояния нижней челюсти при действии сосредоточенной нагрузки на окклюзионную поверхность зубного протеза, зафиксированного на двух сферических имплантатах.

Для построения твердотельной модели нижней челюсти и зубочелюстного протеза использовались соответствующие данные компьютерной томографии. Обработка данных осуществлялась в пакете Mimics 13 (Materialise, Leuven, Belgium) с учетом губчатой и кортикальной костной ткани, а также слизистой оболочки. В среднем толщина слизистой оболочки составляет 3,0 мм. Моделирование имплантатов со сферическим соединением выполнено в пакете