получим решение задачи (2), (3) при $\lambda > 0$ [1]:

$$g(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\mu}\frac{f^*(t)}{t-x}dt- \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\theta}{\pi}}\frac{1}{1+x}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{\theta}{\pi}}(1+t)\frac{f^*(t)}{t-x}dt,\ -1<x<1,$$

где $\mu = \arctan\sqrt{\lambda}$, $\theta = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\mu + \dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{1}{2}$.

Применив для сингулярных интегралов квадратурные формулы [2], получим формулу приближённого решения

$$g_n(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{i=1}^{n}A_i(x)f^*(t_i) + \lambda\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{\theta}{\pi}}\frac{1}{1+x}\sum_{i=1}^{n}B_i(x)f^*(s_i).$$

Погрешность приближенного решения определяется погрешностью применяемых квадратурных формул.

Литература

1. *Мастяница В.С., Смажевский Р., Шешко М.А.* Решение в замкнутой форме одного класса сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши первого рода. *Доклады НАН РБ.* Т. 50, No. 2 (2006), 20–24.

2. *Шешко М.А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла. *Известия вузов. Математика.* No. 12 (175) (1976), 108–118.

3. *Estrada R., Kanwal R.P. Singular Integral Equations.* Birkhäuser: Boston-Basel-Berlin (2000).

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ $|x|^\alpha$ ПО СИСТЕМЕ УЗЛОВ ЧЕБЫШЕВА–МАРКОВА ВТОРОГО РОДА С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ

В. Ю. Медведева, Е. А. Ровба (Гродно, Беларусь)

Пусть $u_{2n+1}(x)$ — синус дробь Чебышева–Маркова

$$u_{2n+1}(x) = \frac{\sin\mu_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

где $\mu_{2n+1}(x) = 2\arccos(x) + \sum_{k=1}^{2n}\arccos\dfrac{x+a_k}{1+a_kx}$, $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ — чисто мнимые числа либо нули, $k = 1, 2, ..., 2n$, причём:

$$1)\ a_{n+k} = -a_k,\ \mathrm{Im}a_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n;$$

$$2)\ a_1 = ... = a_r = 0,\ r = [\alpha/2] + 1,\ n > r. \tag{2}$$

Обозначим через x_k, $k = 0, 1, ..., 2n$, нули функции $u_{2n+1}(x)$. Нетрудно показать, что

$$-1 < x_{2n} < x_{2n-1} < ... < x_{n+1} < x_n = 0 < x_{n-1} < ... < x_1 < x_0 < 1; \tag{3}$$

$$x_{2n-k} = -x_k,\ k = 0, 1, ..., n;$$

$$\mu_{2n+1}(x_k) = \pi(k+1),\ k = 0, 1, ..., 2n.$$

Теперь для функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа $L_{2n}(x, f)$:

$$L_{2n}(x, f) = \sum_{k=0}^{n} x_k^\alpha \frac{u_{2n+1}(x)}{(x-x_k)u'_{2n+1}(x_k)} + \sum_{k=n+2}^{2n+1}(-x_k)^\alpha\frac{u_{2n+1}(x)}{(x-x_k)u'_{2n+1}(x_k)}. \tag{4}$$

Получено интегральное представление остатка интерполирования этой функции.

Далее, пусть $n > r$, $r = [\alpha/2] + 1$, $n_1 = n - r$ и q — произвольное целое число, $0 \leqslant q \leqslant n_1$; $A_{2n,2q}$ есть множество точек $a = (a_1, a_2, ..., a_{2n})$, удовлетворяющих условиям (2) и таких, что среди этих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ имеется q различных отличных от нуля и кратность каждой точки не больше $[n_1/(q+1)]$. Оставшиеся неопределёнными числа a_k полагаем равными нулю.

Введём величину

$$\varepsilon_{2n,2q} = \inf_{a \in A_{2n,2q}} \max_{-1 \le x \le 1} \left| |x|^{\alpha} - L_{2n}(x, f) \right|. \tag{5}$$

В этом случае справедлива следующая оценка сверху:

$$\varepsilon_{2n,2q} \le C_3(q, \alpha) \cdot \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\ln^{2q} n}{n^{2q+1}} \right)^{\alpha}, n > n_0, \tag{6}$$

где $C_3(q, \alpha)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от q и α.

ТОЧНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С ОДНОМЕРНЫМ ВЫХОДОМ

А. В. Метельский (Минск, Беларусь)

Изучается система линейных автономных дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih),\ t > 0, \quad x(t) = \eta(t), t \in [-mh, 0]. \tag{1}$$

Здесь $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ — n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \ge 2$); $0 < h$ — число (запаздывание); A_i — постоянные $n \times n$-матрицы ($i = \overline{0, m}$); η — кусочно непрерывная функция. Штрих $'$ обозначает операцию транспонирования.

Обозначим $D^i S^j f(t) = f^{(i)}(t - jh)$ ($f(t)$ — функция; $i, j \ge 0$ — целые числа), т. е. S — оператор сдвига, D — оператор дифференцирования.

Доступен измерению одномерный выход системы (1)

$$y(t) = c'(S)x(t),\ t \ge 0,\ c'(\lambda) = [c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)], \tag{2}$$

где $c_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, — полиномы степени не выше m: $\deg c_i(\lambda) \le m$.

Пусть $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ — множеству комплексных чисел), E_n — единичная матрица n-го порядка. Считаем, что система (1)–(2) спектрально наблюдаема:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pE_n - A(e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n,\ p \in \mathbb{C}.$$

Дифференциально-разностную систему, выход которой $z(t) = [z_1(t), ..., z_n(t)]$ тождественен решению системы (1)–(2), начиная с некоторого момента времени

$$x(t) = z(t),\ t \ge t_1, \tag{3}$$

назовем точным наблюдателем. Строим его в виде ($A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$)

$$\begin{gathered} \dot{z}_1(t) = a_{11}(S)z_1(t) + ... + a_{1n}(S)z_n(t) + \varphi_1(S)z_{n+1}(t) + b_1 z_{n+2}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_n(t) = a_{n1}(S)z_1(t) + ... + a_{nn}(S)z_n(t) + \varphi_n(S)z_{n+1}(t) + b_n z_{n+2}(t), \\ \dot{z}_{n+1}(t) = c_1(S)z_1(t) + ... + c_n(S)z_n(t) + \varphi_{n+1}(D, S)z_{n+1}(t) + z_{n+2}(t) - y(t), \\ \dot{z}_{n+2}(t) = p_0 z_{n+2}(t) + f_1(D, S)z_{n+3}(t) + \bar{q}_1(S)z_{n+4}(t), \\ \dot{z}_{n+3}(t) = z_{n+1}(t - h) + f_2(D, S)z_{n+3}(t) + \bar{q}_2(S)z_{n+4}(t), \\ \dot{z}_{n+4}(t) = z_{n+3}(t) + a_2(S)z_{n+4}(t),\ t > t_0 \ge 0. \end{gathered} \tag{4}$$