FIRST MIXED PROBLEM FOR GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS ON A SEGMENT

F. E. Lomovtsev (Minsk, Belarus)

We derive the global correctness theorem on $\dot{Q}_n =]0, d[\times]0, d_{n+1}[$ to the problem:

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) +$$

$$+c(x,t)u_x(x,t) + q(x,t)u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \dot{Q}_n, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < d, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=d} = \mu_2(t),\ 0 < t < d_{n+1},\ d_n = (n-1)h^{(2)}[d/2, g_2(0.0)], \quad (3)$$

The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ give the implicit characteristics $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$. If $a(x,t) \geq a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x. Therefore, the implicit functions $y_i = g_i(x,t)$ have the inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$. If coefficient $a \in C^2(G_\infty)$, then functions g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ with respect to the variables x, t, y_i, $i = 1, 2$ [1].

It was only first proved the existence of a unique and stable classical solution to corresponding auxiliary mixed problem for general telegraph equation on half-line by the Schauder's method of continuation with respect to a parameter and the author's theorems on increasing the smoothness of strong solutions in article [1].

Then without explicitly continuing the problem data f, φ, ψ, μ_1, μ_2 outside a set Q_n we have proved the global correctness theorem to this mixed problem by author novel "method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string (wave equation on a half-line)" [2] and to the global correctness theorem for auxiliary mixed problem on half-line in the work [3]. The statement of mixed problem (1)–(3) and definition of its classical solutions imply the necessity for some smoothness requirements and all matching conditions. To find matching conditions, we differentiate equalities (3) twice in t, and calculate the values of the derivatives of solutions u for $x = 0, t = 0$ and $x = d, t = 0$ using the initial conditions (2) and the equation (1). The additional corresponding integral requirements is deduced by author correction method.

References

1. *Lomovtsev F.E.* First mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics,* No. **1**. (2021), 18–38.

2. *Lomovtsev F.E.* Method of auxiliary mixed problems for semi-bounded string. In: *Sixth Bogdanov readings on ordinary differential equations: mater. Int. mat. conf. Minsk, BSU. 7–10 Dec., 2015 / Eds. S.G. Krasovsky.* Minsk: IM NAS Belarus. (2015), Part 2. 74–75.

3. *Lomovtsev F.E.* Riemann formula of the classical solution to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. In: *Int. math. conf. "Seventh Bogdanov Readings on Differential Equations" Minsk, BSU. June 1–4, 2021.* Minsk: IM NAS Belarus. (2021).

ПОЛНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА–КИПРИЯНОВА. СВЯЗЬ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ БЕССЕЛЯ–КИПРИЯНОВА–КАТРАХОВА

Л. Н. Ляхов (Воронеж, Россия), С. А. Рощупкин (Елец, Россия)

В [1] введен следующий интегральный оператор, называемый преобразованием Радона–Киприянова:

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1} \mathcal{P}^\gamma_{ev,x}\,\delta(p - x\xi)f(x)x^\gamma dx, \quad \mathbb{R}_1 = \{-\infty < x < +\infty\},$$

где $\mathcal{P}^{\gamma}_{ev,x}$ — четного типа оператор Пуассона. Введем нечетного типа оператор Пуассона по формуле

$$\mathfrak{P}^{\gamma}_{od,x} f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} f(x\cos\alpha)\cos\alpha \cdot \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha.$$

Через $\Pi^{\gamma}_x f(x) = \mathfrak{P}^{\gamma}_{od,x} f(x) - i\mathfrak{P}^{\gamma}_{od,x} f(x)$ обозначим Полный оператор Пуассона.

Полное специальное преобразование Радона определим в виде суммы четной и нечетной составляющих: $\mathfrak{R}_{\gamma} = \mathcal{R}_{\gamma,ev} + \mathcal{R}_{\gamma,od}$,

$$\mathfrak{R}_{\gamma}[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1} \Pi^{\gamma}_x\, \delta(p - x\xi) f(x) x^{\gamma} dx, \quad \mathbb{R}_1 = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

Имеет место связь этого преобразования с преобразованием Бесселя–Киприянова–Катрахова [2].

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi}\, \mathfrak{R}_{\gamma}[f](p)\, dp\,, \quad \mathfrak{R}_{\gamma}[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi}\, \mathcal{F}_B[f](\xi)\, d\xi\,.$$

Литература

1. *Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона* // ДАН. Т. 360 №2 (1998), 157–160.

2. *Ляхов Л.Н., Лапшина М.Г., Рощупкин С.А. Полное преобразование Радона-Киприянова. Некоторые свойства.* // ДАН, Т. 489. №2. (2019), 125–130.

РАВНОМЕРНАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЧЁТНОГО И НЕЧЁТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский (Минск, Беларусь)

Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f ($f \in C[a,b]$) и $n \in \mathbb{N}_0$ через $R_n(f,[a,b])$ обозначим наилучшее равномерное приближение f посредством рациональных функций степени не выше n.

Пусть $f \in C[0,1]$ такая, что $f(0) = 0$. Через f^+ и f^- обозначим соответственно чётное и нечетное продолжения f на отрезок $[-1,1]$. Нас будет интересовать вопрос: "Как связаны между собой наилучшие рациональные приближения f и $f^{\pm}$?" Очевидно, что $R_n(f^{\pm},[-1,1]) \geq R_n(f,[0,1])$. Далее будем рассматривать два случая: с учётом $\omega(\delta,f)$ — модуля непрерывности функции f и без него. С использованием леммы 5.4 из [1, стр. 112] нами получена следующая

Теорема 1. Пусть $f \in C[0,1]$ и $f(0) = 0$. Тогда для любого $n \geq 8$ выполняется неравенство

$$R_n(f^{\pm},[-1,1]) \leq R_{[n/8]}(f,[0,1]) + 4\omega(e^{-\sqrt{n}},f) + e^{-\varkappa\sqrt{n}}\|f\|_{C[0,1]},$$

где $\varkappa \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ — абсолютная постоянная.

Если же не использовать $\omega(\delta,f)$, то содержательную оценку сверху посредством $R_n(f,[0,1])$ можно получить лишь для $R_n(f^+,[-1,1])$. Именно, справедлива теорема 2, принадлежащая А.А. Пекарскому (см. [2, стр. 341]).

Теорема 2. Пусть $f \in C[0,1]$. Тогда для любых $n,p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$R_n(f^+,[-1,1]) \leq \frac{c}{n^p}\left(\sum_{k=0}^{n} R_k^{1/p}(f,[0,1])\right)^p,\ c = c(p) > 0.$$

О точности теорем 1 и 2 можно судить на следующем примере из [3]. Пусть $\gamma > 0$ и $a > e$. Рассмотрим функцию

$$g_{\gamma}(x) = \left(\ln\ln\frac{a}{x}\right)^{-\gamma}, \quad x \in (0,1]; \quad g_{\gamma}(0) = 0.$$