О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. В. Амелькин (Минск, Беларусь), В. Ю. Тыщенко (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим линейные неавтономные дифференциальные системы

$$dx = \sum_{j=1}^{m} A_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j \tag{1}$$

и

$$dx = \sum_{j=1}^{m} B_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j, \tag{2}$$

обыкновенные при $m = 1$ и вполне разрешимые [1, с. 21] при $m > 1$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, квадратные матрицы $A_j(t_1, \ldots, t_m) = ||a_{ikj}(t_1, \ldots, t_m)||$ и $B_j(t_1, \ldots, t_m) = ||b_{ikj}(t_1, \ldots, t_m)||$ размера n состоят из голоморфных функций $a_{ikj} : \mathfrak{B}_1 \to \mathbb{R}$ и $b_{ikj} : \mathfrak{B}_2 \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$, линейно связные голоморфные многообразия $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ голоморфно эквивалентны друг другу. Общие решения систем (1) и (2) определяют накрывающие слоения [2, с. 6] $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$, соответственно, на многообразиях $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}_1$ и $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}_2$.

Будем говорить, что системы (1) и (2) **топологически (голоморфно) эквивалентны**, если топологически (голоморфно) эквивалентны [2, с. 8] соответствующие им накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$. Фазовую группу [2, с. 6] L^1 (L^2) накрывающего слоения $\mathfrak{L}^1$ ($\mathfrak{L}^2$), определяемого системой (1) (системой (2)), будем называть **группой монодромии**, а определяющие группу матрицы P_{γ_1} $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$ (матрицы Q_{γ_2} $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$) — **матрицами монодромии** этой системы.

Имеют место следующие утверждения [3].

Теорема. Из топологической эквивалентности систем (1) и (2) с неабелевыми группами монодромии общего положения следует сопряженность действий данных групп посредством невырожденного линейного отображения.

Следствие 1. Из топологической эквивалентности систем (1) и (2) с неабелевыми группами монодромии общего положения следует их голоморфная эквивалентность.

Следствие 2. Система (1) с неабелевой группой монодромии структурно неустойчива.

Литература

1. *Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: УРСС (2004).

2. *Тыщенко В.Ю. Качественные характеристики накрывающих слоений дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ (2021).

3. *Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю.* Сопряженности вещественных неабелевых линейных действий. *Веснік ГрДУ.* Сер. 2. No. 2 (2021), 52–56.

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Т. К. Андреева, Н. С. Березкина,
И. П. Мартынов, В. А. Пронько (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим уравнение

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + ayy'' + by'^2 + cy^2y' + dy^4 + ly^3 \frac{y'' - 2yy'}{y' - y^2} + F, \tag{1}$$

где $\nu \in \mathbb{N}$ или $\nu = \infty$; a, b, c, d, l – комплексные постоянные; $F = Hy'' + Kyy' + +Ly^3 + My' + Ny^2 + Py + Q$, где H, K, L, M, N, P, Q — аналитические функции переменной z в области $\Omega \subset$

$\mathbb{C}$. Пенлеве-анализ уравнения (1) при $F \equiv 0$ проводился в работах [1, 2, 3], при $F \neq 0$ — в работах [4, 5].

Ставится задача: найти необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (1). На примере уравнения

$$y''' = \frac{1}{2}\frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + 4yy'' + 6y'^2 - 8y^2y' + F \tag{2}$$

покажем алгоритм нахождения функции F для наличия требуемого свойства.

Уравнение (2) при $F \equiv 0$ является упрощенным, поскольку инвариантно при замене переменных $(z, y) \to (\varepsilon z, \varepsilon^{-1}y)$, и, согласно [1], его решения не содержат подвижных многозначных особенностей. От уравнения (2) перейдем к системе

$$\begin{gathered} y' = y^2 + u, u'' = \tfrac{1}{2}\tfrac{u'^2}{u} + (H + 2y)u' + 4u^2 + \\ +\big(4y^2 + (2H + K)y + M\big)u + (2H + K + L)y^3 + (M + N)y^2 + Py + Q. \end{gathered} \tag{3}$$

Используя метод малого параметра, доказана

Лемма 1. Для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений системы (3) необходимо выполнение следующих условий:

$$2H + K + L = M + N = P = Q = 0.$$

Используя метод резонансов, доказана

Лемма 2. Для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (2) необходимо выполнение следующих условий:

$$8H + 2K + L = K + 6H = 2M + N = 0.$$

С учетом лемм 1, 2 уравнение (2) примет вид

$$y''' = \frac{1}{2}\frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + 4yy'' + 6y'^2 - 8y^2y' + Hy'' - 6Hyy' + 4Hy^3, \tag{4}$$

где H — аналитическая функция переменной z в области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Уравнение (4) можно записать в виде

$$\left(\frac{(y'' - 6yy' + 4y^3)^2}{y' - y^2}\right)' = 2H\frac{(y'' - 6yy' + 4y^3)^2}{y' - y^2}. \tag{5}$$

Уравнение (5) эквивалентно системе

$$u = \frac{(y'' - 6yy' + 4y^3)^2}{y' - y^2}, u' = 2Hu. \tag{6}$$

Из второго уравнения системы (6) получим $u = h(z)$, где $h(z) = exp(2\displaystyle\int Hdz)$. От системы (6) перейдем к системе

$$y' - y^2 = \frac{1}{4w^2}, \quad (y'' - 6yy' + 4y^3)^2 = h(z)(y' - y^2). \tag{7}$$

Откуда запишем

$$y = \frac{-w' - \sqrt{h(z)}w^2}{2w}, \quad w'' = \frac{1}{2}\frac{w'^2}{w} - 2\sqrt{h(z)}ww' - \frac{h(z)}{2}w^3 - \frac{h'(z)}{2\sqrt{h(z)}}w^2 - \frac{1}{2w}. \tag{8}$$

Согласно Пенлеве–анализу уравнений второго порядка с рациональной правой частью, решения второго уравнения системы (8) не содержат подвижных многозначных особенностей. Следовательно, учитывая первое уравнение системы (8), справедлива

Теорема. *Решения уравнения (4) не содержат подвижных многозначных особенностей.*

Литература

1. *Мартынов И.П.* Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка. *Дифференц. уравнения.* Vol. 21, No. 5 (1985), 764–771.

2. *Мартынов И.П., Проньќо В.А.* Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве. *Дифференц. уравнения.* Vol. 24, No. 9 (1988), 1640–1641.

3. *Андреева Т.К., Мартынов И.П., Проньќо В.А.* Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка. *Дифференц. уравнения.* Vol. 47, No. 9 (2011), 1219–1224.

4. *Проньќо В.А.* К теории дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных критических особенностей. *дис… канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.* Минск, 1989. – 114 л.

5. *Андреева Т.К.* Об одном классе уравнений третьего порядка с рациональной правой частью без подвижных многозначных особенностей. *Веснік ГрДУ.* Сер. 2, No. 2 (2010), 17–23.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

А. Н. Артюшин (Новосибирск, Россия)

Пусть $0 < \nu < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $s = \Gamma \times (0,T)$. В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial_t^\nu(k(x,t)u(x,t)) - \Delta u(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_S = 0, \tag{2}$$

$$k(x,0)u(x,0) = 0. \tag{3}$$

В работе [1] был предложен подход, позволяющий доказать разрешимость этой задачи в случае $k(x,t) \geqslant 0$. В основе этого подхода лежат оценки снизу для интегралов вида

$$\int_0^t r(s)|y(s)|^{p-2}y(s)\partial^\nu(k(s)y(s))\,ds$$

с неотрицательными функциями r, k. Есть определенные основания предполагать, что в случае знакопеременного коэффициента $k(x,t)$ будет корректна задача типа Фикеры для эллиптико-параболических уравнений (см. [2]). В этом случае вместо условия (3) возникают некоторые другие условия (как при $t = 0$, так и при $t = T$). А именно

$$u(x,0) = 0, \text{если } k(x,0) > 0, \tag{4}$$

$$u(x,T) = 0, \text{если } k(x,T) < 0. \tag{5}$$

В настоящем докладе мы рассматриваем лишь сравнительно простой случай, когда $k(x,0) \geqslant 0$ и $k(x,T) \geqslant 0$. Тогда условия (4) и (5) дают в точности (3). Внутри области Q функция $k(x,t)$ может менять знак произвольным образом. При определенных условиях доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений задачи (1)–(3).

Литература

1. *Артюшин А.Н.* Интегральные неравенства с дробной производной и их приложение к вырождающимся дифференциальным уравнениям с дробной производной Капуто. *Сиб. Мат. Журнал.* Том **61**, No. 2 (2020), 266–282.

2. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1969*, ВИНИТИ, М., (1971).