ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТРАТОНОВИЧА, СОДЕРЖАЩИХ АНТИПЕРСИСТЕНТНЫЕ ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

А. А. Леваков, М. М. Васьковский (Минск, Беларусь)

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

$$dX(t) = b(X(t))dt + h(X(t))dW(t) + \sigma(X(t))dB^H(t),\ t \in [0,T],\ X \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

где $W(t)$, $B^H(t)$ — независимые d_1–мерное стандартное броуновское движение, d_2–мерное дробное броуновское движение с индексом Херста $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Перейдем от уравнения (1) к соответствующему уравнению в грубых траекториях

$$dX(t) = f(X(t))d\mathbf{B}(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B})$ — геометрическая грубая траектория над процессом $B(t) = (t, W(t), B^H(t))$, $\mathbb{B}$ — процесс второго порядка над B.

Пусть $B_m(t)$, $m \geq 1$, — последовательность кусочно-линейных аппроксимаций процесса $B(t)$.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим последовательность уравнений

$$dX(t) = f(X(t))dB_m(t). \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна и ограничена вместе с частными производными до третьего порядка включительно, $X_m(t)$ — решение уравнения (3) с начальным условием $X(0) = x \in \mathbb{R}^d$. Тогда последовательность процессов $X_m(t)$, $m \geq 1$, сходится по вероятности равномерно по $t \in [0,T]$ к единственному решению уравнения (2) с начальным условием $X(0) = x$.

Из теоремы 1 вытекает следующий метод интегрирования уравнения (2) и соответствующего ему уравнения (1):

1) построить кусочно-линейные аппроксимации B_m процесса B;

2) методами последовательных приближений или ломаных Эйлера найти решение $X_m(t)$ уравнения (3) с начальным условием $X(0) = x$;

3) найти предел по вероятности $X(t) = \lim\limits_{m\to\infty} X_m(t)$.

Теорема 2. Пусть функция $f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_n)$, $n = 1+d_1+d_2$, имеет непрерывные и ограниченные частные производные любого порядка. Если дифференциальные операторы $D_i = f_i \dfrac{\partial}{\partial X}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, попарно коммутируют, то единственное решение уравнения (2) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ задается формулой

$$X(t) = (S_{1,B^{(1)}(t)} \circ \ldots \circ S_{n,B^{((n))}(t)})(x),\ t \in [0,T],$$

где $B^{(i)}(t)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, — компоненты процесса $B(t)$, $S_{i,t} = \exp(tD_i)$, $t \in \mathbb{R}$, — полугруппа сдвига, соответствующая обыкновенному дифференциальному уравнению $dZ(t) = f_i(Z(t))dt$.

СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, b, c, z_1, \ldots, z_n)$ С ПАРАМЕТРАМИ ДЕФОРМАЦИИ ВЕСЕЛОВА–ЧАЛОГО СИСТЕМ ТИПА A_n

В. П. Лексин (Коломна, Россия)

Функция Лауричеллы [2], представленная в окрестности начала координат комплесного линейного пространства $\mathbb{C}^n$ степенным рядом

$$F_D^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, b, c, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1} \cdots (a_n)_{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_n!} z_1^{k_1} \cdots z^{k_n}, \tag{1}$$

где $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots k_n$ — сумма целых неотрицательных показателей степеней переменных, является прямым обобщением на многомерный случай классической гипергеометрической функции Гаусса [1]. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы является компонентой решения некоторой многомерной фуксовой системы. Мы покажем, что в качестве такой системы можно взять $\vee$–систему Веселова [4, 5], отвечающую деформации Веселова–Чалого [3]

$$A_n(c) = \{\alpha_{ij} = \sqrt{c_i c_j}(z_i - z_j),\ 1 \le i,\, j \le n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1} c_i \ne 0\}. \tag{2}$$

системы корней типа $A_n = \{z_i - z_j,\ i, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n+1\}$, Такая $\vee$-система имеет вид

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n+1} (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z))\, \frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \tag{3}$$

где параметры β_i, $i = 1, \ldots, n+1$, выражаются через параметры c_i формулами $\beta_i = \dfrac{c_i}{c_1 + \ldots + c_{n+1}}$, $i = 1,\, \ldots,\, n+1$.

Теорема. Пусть $A_{n+1}(c) = \{\alpha_{ij} = \sqrt{c_i c_j}(z_i - z_j),\ 1 \le i < j \le n+2,\ \Delta = \sum_{i=1}^{n+2} c_i \ne 0\}$ деформация Веселова–Чалого множества положительных корней системы корней A_{n+1}.

1) Если сумма Δ постоянна, тогда параметры c_i, $i = 1, \ldots, n+2$, $\vee$–системы Веселова, отвечающей указанной деформации Веселова-Чалого, при которых $(n+2)$-ой компонентой некоторого решения этой $\vee$–системы Веселова является функция Лауричеллы $F_D^{(n)}(a_1,\, \ldots,\, a_n,\, b,\, c,\, z_1,\, \ldots,\, z_n)$, выражаются через параметры функции Лауричеллы по следующим формулам:

$$\begin{cases} c_1 = -a_1\Delta, \\ \vdots \\ c_n = -a_n\Delta, \\ c_{n+1} = (c - b - 1)\Delta, \\ c_{n+2} = (\sum_{i=1}^{n} a_i + 2b - c - 3)\Delta. \end{cases} \tag{4}$$

2) Если сумма параметров $\Delta = \sum_{i=1}^{n+2} c_i$ не является постоянной, то система равенств (4) для параметров c_i, $i = 1,\, 2, \ldots,\, n$, деформации Веселова–Чалого превращается в однородную систему линейных алгебраических уравнений. Для существования $\vee$–системы Веселова с хотя бы одним ненулевым набором параметров c_i, $i = 1,\, 2, \ldots,\, n+2$, среди компонент некоторого решения которой есть функция Лауричеллы с заданными параметрами, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы линейных уравнений (4) из предыдущего пункта был равен нулю.

Схема доказательства. Сравнивая интегральные представления функции Лауричеллы и базисных решений $\vee$–системы Веселова приходим к сформулированным в теореме утверждениям.

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* М.: Наука (1974).

2. *Безродных С.И.Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D(N)$, задача Римана-Гидьберта и приложения.* УМН. 73, вып. 6 (2018), 3–94.

3. *Chalykh O.A., Veselov A.P. Locus configurations and vee–systems. Phys. Lett. A.* Vol.**285** (2001), 339–349.

4. *Feigin M.V., Veselov A.P. $\vee$-systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields.* arxiv: 2409.2424v3 [math.RT] 13 Apr 2017.

5. *Лексин В.П. Линейные пфаффовы системы и классические решения треугольных уравнений Шлезингера. Труды МИАН*, Том **308** (2020), 141–153.