ная; $t \in \left[0, ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$; r_0 и R — внутренний и внешний радиусы диска соответственно; $K(t,\tau) = \left\{\left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)' + \ +\Omega^2\left(1+\sqrt{\frac{r_0^4 e^{4z}}{h^2(\tau)}+\frac{1}{4}\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)^2 r_0^2 e^{2\tau}}\right)\right] sin\Omega(t-\tau) - \Omega\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right) cos\Omega(t-\tau)\right\}$ — ядро интегрального уравнения (1); $f(t) = C_1 cos\Omega t + C_2 sin\Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (1); C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Пусть на внутреннем контуре полярно-ортотропного кольцевого диска поддерживается постоянная температура T_1, а на внешнем контуре — T_2. Причём $T_0 < T_1 < T_2 < T_{\text{пл}}$, где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления материала диска. Тогда граничные условия примут вид:

$$\Theta_0(0) = T_1 - T_0, \Theta_0(ln(R/r_0)) = T_2 - T_0.$$

Для решения линейного интегрального уравнения (1) применим метод последовательных приближений [2]:

$$\Theta_0^{(m)}(t) = \lambda \int_0^t K(t,\tau)\Theta_0^{(m-1)}(\tau)d\tau + f(\tau),$$

где индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $\Theta_0^{(0)}(t) = 0$. В связи с наличием иррациональности в ядре интегрального уравнения вычисления последующих итераций следует проводить численными методами.

Если $f(t)$ непрерывна в $[0, ln\,(R/r_0)]$, а ядро $K(t,\tau)$ непрерывно при $0 \le t \le ln\,(R/r_0)$, $0 \le \tau \le t$, то последовательность $\left\{\Theta_0^{(m)}(t)\right\}$ сходится при $m \to \infty$ к решению $\Theta_0(t)$ линейного интегрального уравнения (1):

$$\Theta_0(t) = \lim_{m\to\infty} \Theta_0^{(m)}(t).$$

Литература

1. *Королевич В.В.* Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учётом теплообмена с внешней средой. *Журнал БГУ.* Математика. Информатика. № 2 (2018), 58–66.

2. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига (2007).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич (Прага, Чехия), Д. Г. Медведев (Минск, Беларусь)

В работе [1] нами были получены обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами для плоской задачи теории упругости, описывающей равномерно вращающиеся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг нормальной оси полярно-ортотропные кольцевые диски переменной толщины $h(r)$ при различных граничных условиях. Их решение сводилось к решению соответствующих линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для вторых производных искомых функции напряжений и перемещения. Такой подход приводит к дополнительным операциям по нахождению функции напряжений и перемещения путем интегрирования найденных решений интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, что аналитически не всегда выполнимо, и приходиться применять численные методы.

В данной работе, применяя метод Лиувилля, решение обыкновенных дифференциальных уравнений поставленных задач теории упругости сводится к решению соответствующих интегральных уравнений непосредственно для искомых функции напряжений $\psi(r)$ и радиального перемещения $u(r)$. Эти интегральные уравнения имеют вид:

– для 1-й основной задачи теории упругости:

$$\psi(t) = \lambda_1 \int_0^t K_1(t,\tau)\psi(\tau)d\tau + f_1(t), \tag{1}$$

где $\lambda_1 = -\dfrac{1}{k}$ — числовой параметр; $t = ln(\frac{r}{r_0})$ — переменная; r_0 — внутренний радиус диска; $K_1(t,\tau) = \left\{ \left[\left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \nu_{\theta r} \left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \cdot sh(k(t-\tau)) - k \left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cdot \; ch(k(t-\tau)) \right\}$ — ядро интегрального уравнения (1); $f_1(t) = C_1 \cdot ch(kt) + C_2 \cdot sh(kt) - \dfrac{(3+\nu_{\theta r})}{k} \rho\omega_0^2 r_0^3 \int_0^t h(\tau)e^{3\tau} sh(k(t-\tau))d\tau$ — свободный член интегрального уравнения (1); C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий; $k = E_\theta/E_r; E_\theta, E_r$ — модули Юнга в тангенциальном и радиальном направлениях соответственно; $\nu_{\theta k}$ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность композитного материала диска.

Радиальное напряжение $\sigma_r(r)$ и тангенциальное напряжение $\sigma_\theta(r)$ выражаются через функцию напряжений $\psi(r)$ по формулам:

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi(r)}{rh(r)}, \sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)}\frac{d\psi}{dr} + \rho\omega_0^2 r_0^2.$$

Из закона Гука для полярно-ортотропного тела найдем выражение для радиального перемещения $u(r)$ через функцию напряжений $\psi(r)$:

$$u(r) = \frac{r}{E_\theta}(\sigma_\theta(r) - \nu_{\theta r}\sigma_r(r)) = \frac{r}{E_\theta h(r)} \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\nu_{\theta r}}{r}\psi(r) + h(r)\rho\omega_0^2 r_0^2 \right).$$

Граничные условия для 1-й основной задачи теории упругости есть:

$$\sigma_r(r_0) = -\rho_0, \sigma_r(R) = \rho_1 = const,$$

где ρ_0 — контактное давление на внутреннем контуре диска; ρ_1 — интенсивность распределенной постоянной нагрузки на внешнем контуре диска радиуса R.

– Для 2-й основной задачи теории упругости:

$$u(t) = \lambda_2 \int_0^t K_2(t,\tau)u(\tau)d\tau + f_2(t), \tag{2}$$

где $\lambda_2 = \dfrac{1}{k}$ — числовой параметр; $K_2(t,\tau) = \left\{ \left[\left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \nu_{\theta r} \left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \cdot \right.$ $\left. \cdot sh(k(t-\tau)) - k \left(\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cdot ch(k(t-\tau)) \right\}$ — ядро интегрального уравнения (2); $f_2(t) = C_3 \cdot ch(kt) + C_4 \cdot sh(kt) + \dfrac{(k^2 - \nu_{\theta r}^2)}{(k^2-9)} \dfrac{\rho\omega_0^2 r_0^3}{E_\theta} e^{3t}$ — свободный член интегрального уравнения (2).

Постоянные интегрирования C_3, C_4 определяются из граничных условий:

$$u(r_0) = U_0, u(R) = U_1,$$

где U_0, U_1 — постоянные смещения на внутреннем и внешнем контурах диска.

Используя закон Гука для полярно-ортотропного тела, получим выражения для компонент напряжений $\sigma_r(r), \sigma_\theta(r)$ через радиальное перемещение $u(r)$:

$$\sigma_r(r) = \frac{E_\theta}{(k^2 - \nu_{\theta r}^2)} \left(\frac{du}{dr} + \frac{\nu_{\theta r}}{r}u(r) \right), \sigma_\theta(r) = \frac{E_\theta}{(k^2 - \nu_{\theta r}^2)} \left(\nu_{\theta r}\frac{du}{dr} + \frac{k^2}{r}u(r) \right).$$

Для решения линейных интегральных уравнений (1) и (2) применим метод последовательных приближений [2]:

$$y_m^{(i)}(t) = \lambda_i \int_0^t K_i(t,\tau) y_{m-1}^{(i)}(\tau) d\tau + f_i(t), (i = \overline{1,2}),$$

где $y_m^{(1)}(t) = \psi_m(t)$, $y_m^{(2)}(t) = u_m(t)$, индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $y_0^{(i)}(t) = 0$.

Если $f_i(t)$ непрерывны в $[0, ln\,(R/r_0)]$, а ядра $K_i(t,\tau)$ непрерывны при $0 \leq t \leq ln\,(R/r_0)$, $0 \leq \tau \leq t$, то последовательность $\left\{ y_m^{(i)}(t) \right\}$ сходится при $m \to \infty$ к решениям $y^{(i)}(t)$ интегральных уравнений (1) и (2):

$$y^{(i)}(t) = \lim_{m \to \infty} y_m^{(i)}(t).$$

Литература

1. *Королевич В.В., Медведев Д.Г.* Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины. *Вестник Бел. гос. ун-та.* Сер.1. Физ. Мат. Информ. №1 (2010), 160–162.

2. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига (2007).

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

А. А. Королёва (Минск, Беларусь)

Целью настоящей работы является обзор методов оптимизации транспортных потоков, а также систематизация задач оптимизации транспортных систем, обладающих свойствами, подобными свойствам Монжа. Рассмотрена модель Монжа–Канторовича, матричная и сетевая модели [1], описаны свойства матриц Монжа (матриц Супника) [2], а также ппредставлен программный инструментарий транспортной оптимизации [3-5].

Выделены случаи задач оптимизации транспортных логистических потоков, связанные со специальными случаями Монж- и анти-Монж-матриц, в частности разрешимые случаи задачи коммивояжера [6, 7]), задачи об оптимальных деревьях (Трубин [8], Гимади [9]), задача об оптимальных цепях матриц (Агарвал (Aggarwal) [10]). Выявлены также другие легкоразрешимые задачи оптимизации транспортных систем, обладающих свойствами, подобными свойствам Монжа.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 3.06.8 “Разработка концепции и рекомендаций по созданию государственной универсальной цифровой платформы для повышения эффективности транспортно-логистической системы Беларуси” ГПНИ “Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства” (подпрограмма "Экономика").

Литература

1. *Богачев В.Н., Колесников А.В.* Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы. *Успехи математических наук.* **67**, 5 (2012), 3–110.

2. *Hoffman A.* On simple linear programming problems. *In: V. Klee, ed., Convexity: Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics AMS American Mathematical Society, Providence, RI.* **7** (1963), 317–327.

3. Писарук Н.Н. *Модели и методы смешанного-целочисленного программирования.* Минск, БГУ. 2014.

4. Meindl B., Templ M. *Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems.* Technische Universit?t Wien. 2012.

5. *A tutorial on top commercial mathematical programming solvers and its applications to bi-level in transportation. Centre for Maritime Studies of Singapore.* 2014.

6. *Айзенштат В., Кравчук Д.* Алгоритм нахождения экстремума линейной формы на множестве циклов в специальном случае. *Доклады АН БССР.* **12**, (1968), 401–404.