

где

$$\tau_j^{(k;N)}(x_0) = (-1)^j x_0 + \frac{1}{a} \left(r_N \left((k-1) - 2 \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \right) + (-1)^{j+1} k r_N \right),$$

$$\chi^{(k;N)}(x_0) = (-1)^k (a x_0 - k r_N) + \left| \sin \frac{\pi k}{2} \right| r_N,$$

$r_N = d(N, \Gamma)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до границы Γ ,

$$\tilde{\mu}(x_0, \mathbf{x}') = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}'), x_0 = 0, \\ \mu(\mathbf{z}), x_0 \neq 0 \end{cases},$$

где точка $\mathbf{z} \in \partial Q$ такая, в которой сфера радиусом r_N вокруг точки $\mathbf{x}$ касается границы ∂Q .
При $k = 0$ справедлива формула Кирхгофа.

Литература

1. Корзюк, В.И. Козловская И.С. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч. 2. Минск: БГУ, 2017.
2. Корзюк В.И. Столярчук И.И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования. *Дифференциальные уравнения*. Доклады НАН Беларуси. Т. 63, № 1 (2019), 7–13.
3. Корзюк В.И. Столярчук И.И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе. *Дифференциальные уравнения*. Т. 50, № 8 (2014), 1108–1117.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННОГО ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ В. В. Королевич (Прага, Чехия)

При расчете напряженно-деформированного состояния быстровращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно знать распределение температуры $T(r)$ в нем. Возникающие в диске температурные напряжения могут существенно влиять на его прочность. В работе [1] нами было получено обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды. Теплообмен полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ с окружающей средой происходит через оба основания диска. Решение дифференциального уравнения сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции температуры $\Theta_0(r)$. Такой подход приводит к дополнительным операциям по нахождению функции температуры $\Theta_0(r)$ путем интегрирования найденного решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, что аналитически не всегда выполнимо, и приходится использовать численные методы.

Применяя метод Лиувилля, сведем решение обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка для $\Theta_0(r)$ к решению соответствующего линейного интегрального уравнения непосредственно для искомой функции температуры $\Theta_0(r)$. Это интегральное уравнение имеет вид:

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t K(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau + f(t), \quad (1)$$

где $\lambda = \frac{1}{\Omega}$ — числовой параметр; $\Omega = \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r}}$; H — коэффициент теплоотдачи; λ_K — радиальный коэффициент теплопроводности композитного материала диска; $t = \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$ — перемен-

ная; $t \in \left[0, \ln \left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$; r_0 и R — внутренний и внешний радиусы диска соответственно; $K(t, \tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left(1 + \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right) \right] \sin \Omega(t - \tau) - \Omega \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cos \Omega(t - \tau) \right\}$ — ядро интегрального уравнения (1); $f(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (1); C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Пусть на внутреннем контуре полярно-ортотропного кольцевого диска поддерживается постоянная температура T_1 , а на внешнем контуре — T_2 . Причём $T_0 < T_1 < T_2 < T_{\text{пл}}$, где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления материала диска. Тогда граничные условия примут вид:

$$\Theta_0(0) = T_1 - T_0, \Theta_0(\ln(R/r_0)) = T_2 - T_0.$$

Для решения линейного интегрального уравнения (1) применим метод последовательных приближений [2]:

$$\Theta_0^{(m)}(t) = \lambda \int_0^t K(t, \tau) \Theta_0^{(m-1)}(\tau) d\tau + f(\tau),$$

где индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $\Theta_0^{(0)}(t) = 0$. В связи с наличием иррациональности в ядре интегрального уравнения вычисления последующих итераций следует проводить численными методами.

Если $f(t)$ непрерывна в $[0, \ln(R/r_0)]$, а ядро $K(t, \tau)$ непрерывно при $0 \leq t \leq \ln(R/r_0)$, $0 \leq \tau \leq t$, то последовательность $\{\Theta_0^{(m)}(t)\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к решению $\Theta_0(t)$ линейного интегрального уравнения (1):

$$\Theta_0(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_0^{(m)}(t).$$

Литература

1. Королевич В.В. Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учётом теплообмена с внешней средой. *Журнал БГУ. Математика. Информатика.* № 2 (2018), 58–66.
2. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига (2007).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич (Прага, Чехия), Д. Г. Медведев (Минск, Беларусь)

В работе [1] нами были получены обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами для плоской задачи теории упругости, описывающей равномерно вращающиеся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг нормальной оси полярно-ортотропные кольцевые диски переменной толщины $h(r)$ при различных граничных условиях. Их решение сводилось к решению соответствующих линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для вторых производных искомых функции напряжений и перемещения. Такой подход приводит к дополнительным операциям по нахождению функции напряжений и перемещения путем интегрирования найденных решений интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, что аналитически не всегда выполнимо, и приходится применять численные методы.

В данной работе, применяя метод Лиувилля, решение обыкновенных дифференциальных уравнений поставленных задач теории упругости сводится к решению соответствующих интегральных уравнений непосредственно для искомых функции напряжений $\psi(r)$ и радиального перемещения $u(r)$. Эти интегральные уравнения имеют вид: