где $g^{(1)}, g^{(2)}$ – произвольные функции из класса C^k — области определения этих функций для любых $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, $D\left(g^{(1)}\right) = \mathbb{R}$, $D\left(g^{(2)}\right) = [0, \infty)$.

Решение задачи (1)–(3) находим согласно представлениям (4), (6). Частное решение уравнения (1) из класса C^k в явном виде построено в работах [2,3].

В работе получены условия согласования, при которых существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$, представимое в аналитическом виде, где k — любое целое число и $k \geq 2$.

Литература

1. *Корзюк В.И. Уравнения математической физики* М.: ЛЕНАНД (2021).

2. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями. *Докл. НАН Беларуси* Т. 62 No 6 (2018), 637–645.

3. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Решение волнового уравнения в четверти плоскости. *Труды ИМ НАН Беларуси* Т. 28. No 1-2 (2020), 35–50.

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА КИРХГОФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

В. И. Корзюк, И. И. Столярчук (Минск, Беларусь)

Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырех независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = (0, +\infty) \times \Omega$, где $\Omega = \{\mathbf{x}' | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^3$, относительно неизвестной функции $u : \mathbf{R}^4 \supset Q \to u(\mathbf{x}) \subset \mathbf{R}$ задается волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta'_{\mathbf{x}} u = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\Delta'_{\mathbf{x}} = \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$ — оператор Лапласа.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\mathbf{x}'), \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\mathbf{x}'), \tag{2}$$

где $\varphi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \to \varphi(\mathbf{x}') \subset \mathbf{R}$, $\psi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \to \psi(\mathbf{x}') \subset \mathbf{R}$ — заданные функции. И граничное условие на боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$

$$u|_{\Gamma} = \mu(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mu : \mathbf{R}^4 \supset \Gamma \to \mu(\mathbf{x}) \subset \mathbf{R}$ — заданная функция.

Теорема. *Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}') \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, $\psi(\boldsymbol{x}') \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\mu(\boldsymbol{x}) \in C^3(\Gamma)$. Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu(0, \boldsymbol{x}') = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ \partial_{x_0}\mu(0, \boldsymbol{x}') = \psi(\boldsymbol{x}'),$$
$$\partial_{x_0}^2\mu(0, \boldsymbol{x}') = a^2\Delta'_{\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x}'),\ \partial_{x_0}^3\mu(0, \boldsymbol{x}') = a^2\Delta'_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}')$$

и оно может быть найдено в точках $\boldsymbol{x}$, у которых $x_0 \in \left[\dfrac{kl}{a}; \dfrac{(k+1)l}{a}\right]$, $k = 1, 2, ...$ по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \widetilde{\mu}(\tau_j^{(k;N)}(x_0), \boldsymbol{y}')ds'_{\boldsymbol{y}} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\boldsymbol{y}')ds'_{\boldsymbol{y}} + \frac{(-1)^k}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\boldsymbol{y}')ds'_{\boldsymbol{y}}\right),$$

где

$$\tau_j^{(k;N)}(x_0) = (-1)^j x_0 + \frac{1}{a}\left(r_N\left((k-1) - 2\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor\right) + (-1)^{j+1}kr_N\right),$$

$$\chi^{(k;N)}(x_0) = (-1)^k(ax_0 - kr_N) + \left|sin\frac{\pi k}{2}\right| r_N,$$

$r_N = d(N,\Gamma)$ *— расстояние от точки* $\boldsymbol{x}$ *до границы* Γ,

$$\widetilde{\mu}(x_0,\boldsymbol{x}') = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x}'), x_0 = 0, \\ \mu(\boldsymbol{z}), x_0 \neq 0 \end{cases},$$

где точка $\boldsymbol{z} \in \partial Q$ *такая, в которой сфера радиусом* r_N *вокруг точки* $\boldsymbol{x}$ *касается границы* ∂Q.

При $k = 0$ *справедлива формула Кирхгофа.*

Литература

1. *Корзюк, В.И. Козловская И.С. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч. 2.* Минск: БГУ, 2017.

2. *Корзюк В.И. Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования. *Дифференциальные уравнения.* Доклады НАН Беларуси. Т. 63, № 1 (2019), 7–13.

3. *Корзюк В.И. Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе. *Дифференциальные уравнения.* Т. 50, № 8 (2014), 1108–1117.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННОГО ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич (Прага, Чехия)

При расчете напряженно-деформированного состояния быстровращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно знать распределение температуры $T(r)$ в нем. Возникающие в диске температурные напряжения могут существенно влиять на его прочность. В работе [1] нами было получено обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды. Теплообмен полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ с окружающей средой происходит через оба основания диска. Решение дифференциального уравнения сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции температуры $\Theta_0(r)$. Такой подход приводит к дополнительным операциям по нахождению функции температуры $\Theta_0(r)$ путем интегрирования найденного решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, что аналитически не всегда выполнимо, и приходиться использовать численные методы.

Применяя метод Лиувилля, сведем решение обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка для $\Theta_0(r)$ к решению соответствующего линейного интегрального уравнения непосредственно для искомой функции температуры $\Theta_0(r)$. Это интегральное уравнение имеет вид:

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t K(t,\tau)\Theta_0(\tau)d\tau + f(t), \tag{1}$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\Omega}$ — числовой параметр; $\Omega = \sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r}}$; H — коэффициент теплоотдачи; λ_K — радиальный коэффициент теплопроводности композитного материала диска; $t = ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$ — перемен-