ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

В. И. Корзюк, И. С. Козловская (Минск, Беларусь)

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение смешанной задачи с граничными условием Неймана для волнового уравнения в четверти плоскости в классе непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши, на второй условие Неймана. В четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения выписывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим высокого порядка гладкости и единственным.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$Lu = \left(\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2\right) u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty)\,, \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \overline{Q} \ni \mathbf{x} \to u\,(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где ∂_{x_0}, ∂_{x_1} — операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно,$\partial_{x_0}^2 = \partial_{x_0}\partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2 = \partial_{x_1}\partial_{x_1}$, a^2 — положительное число из $\mathbb{R}$. Для уравнения (1) в четверти плоскости R^2 определяется классическое решение из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$, $k \geq 2$, k — целое положительное число.

Область $Q = [0,\infty) \times [0,\infty)$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)} = \left\{\, \boldsymbol{x} |\, (-1)^j (ax_0 - x_1) > 0 \right\}, \quad j = 1,2$$

независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$. В $Q^{(j)}$ рассматриваем уравнение (1). На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0,x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty)\,, \tag{2}$$

а на оставшейся части границы ∂Q – граничное условие

$$\partial_{x_1} u(x_0,0) = \mu(x_0), \quad x_0 \in [0,\infty). \tag{3}$$

Таким образом имеем смешанную задачу (1)–(3) для уравнения (1).

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$ непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\bar{Q}$ — замыкание области $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$.

Как известно [3], общее решение u уравнения (1) принадлежит классу $C^k\left(\bar{Q}\right)$ тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(0)}(\boldsymbol{x}) + v_p(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

где $u^{(0)}$ — общее решение из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$ однородного уравнения

$$Lu^{(0)}((\boldsymbol{x}) = 0, \tag{5}$$

а $v_p \in C^k\left(\bar{Q}\right)$ — частное решение уравнения (1).

Согласно [1] общее решение $u^{(0)}(\boldsymbol{x})$ из $C^k\left(\bar{Q}\right)$ однородного уравнения (1) существует тогда и только тогда, когда оно представимо в виде [2]

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \tag{6}$$

где $g^{(1)}, g^{(2)}$ – произвольные функции из класса C^k — области определения этих функций для любых $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, $D\left(g^{(1)}\right) = \mathbb{R}$, $D\left(g^{(2)}\right) = [0, \infty)$.

Решение задачи (1)–(3) находим согласно представлениям (4), (6). Частное решение уравнения (1) из класса C^k в явном виде построено в работах [2,3].

В работе получены условия согласования, при которых существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$, представимое в аналитическом виде, где k — любое целое число и $k \geq 2$.

Литература

1. *Корзюк В.И. Уравнения математической физики* М.: ЛЕНАНД (2021).

2. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями. *Докл. НАН Беларуси* Т. 62 No 6 (2018), 637–645.

3. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Решение волнового уравнения в четверти плоскости. *Труды ИМ НАН Беларуси* Т. 28. No 1-2 (2020), 35–50.

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА КИРХГОФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

В. И. Корзюк, И. И. Столярчук (Минск, Беларусь)

Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырех независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = (0, +\infty) \times \Omega$, где $\Omega = \{\mathbf{x}' | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^3$, относительно неизвестной функции $u : \mathbf{R}^4 \supset Q \to u(\mathbf{x}) \subset \mathbf{R}$ задается волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta'_{\mathbf{x}} u = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\Delta'_{\mathbf{x}} = \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$ — оператор Лапласа.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\mathbf{x}'), \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\mathbf{x}'), \tag{2}$$

где $\varphi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \to \varphi(\mathbf{x}') \subset \mathbf{R}$, $\psi : \mathbf{R}^3 \supset \Omega \to \psi(\mathbf{x}') \subset \mathbf{R}$ — заданные функции. И граничное условие на боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$

$$u|_{\Gamma} = \mu(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mu : \mathbf{R}^4 \supset \Gamma \to \mu(\mathbf{x}) \subset \mathbf{R}$ — заданная функция.

Теорема. *Пусть* $\varphi(\boldsymbol{x}') \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, $\psi(\boldsymbol{x}') \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\mu(\boldsymbol{x}) \in C^3(\Gamma)$. *Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu(0, \boldsymbol{x}') = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ \partial_{x_0}\mu(0, \boldsymbol{x}') = \psi(\boldsymbol{x}'),$$

$$\partial_{x_0}^2\mu(0, \boldsymbol{x}') = a^2\Delta'_{\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x}'),\ \partial_{x_0}^3\mu(0, \boldsymbol{x}') = a^2\Delta'_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}')$$

и оно может быть найдено в точках $\boldsymbol{x}$, *у которых* $x_0 \in \left[\dfrac{kl}{a}; \dfrac{(k+1)l}{a}\right]$, $k = 1, 2, ...$ *по формуле*

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \widetilde{\mu}(\tau_j^{(k;N)}(x_0), \boldsymbol{y}') ds'_{\boldsymbol{y}} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\boldsymbol{y}') ds'_{\boldsymbol{y}} + \frac{(-1)^k}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| = \chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\boldsymbol{y}') ds'_{\boldsymbol{y}}\right),$$