

В настоящем докладе излагаются новые результаты о разрешимости в классах регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение) задач с интегральными условиями как для классических — эллиптических, параболических и гиперболических — дифференциальных уравнений, так и для неклассических — уравнений соболевского типа, вырождающихся уравнений.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПОДЧИНЕННЫХ (CONFORMABLE) ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Козлов (Новополоцк, Беларусь)

Сегодня существует множество различных определений производной дробного порядка функции, например, дробная производная Римана–Лиувилля, Грюнвальда–Летникова, Капуто и другие. Однако они обладают не всеми свойствами, присущими производным натурального порядка. Так, например, они не подчиняются правилу Лейбница о производной произведения двух функций. В 2014 году Р. Халил и др. ввели [1] определение *подчиненной (conformable) производной дробного порядка*, которая удовлетворяет этому правилу (см., напр., [1]).

Определение 1. [1] Пусть $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0, 1)$. Подчиненной (conformable) производной дробного порядка α от функции f называется предел

$${}_t T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t))/\varepsilon) \quad \text{при любом } t > 0.$$

Функцию $f(\cdot)$ в таком случае будем называть α -дифференцируемой [1].

Возьмем любое число $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим линейную систему в подчиненных дробных производных порядка α с ограниченной матрицей коэффициентов

$${}_t T_\alpha(x) = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (1)$$

Подчинение правилам вычисления производной суммы и произведения функций (свойственным классической производной) рассматриваемыми производными позволяет ввести по аналогии линейными дифференциальными системами [2]

Определение 2. Преобразованием Ляпунова системы (1) назовем преобразование $x = L(t)y$, в котором $(n \times n)$ -матрица $L(t)$ является ограниченной, обратимой, α -дифференцируемой при всяком $t > 0$, и для нее выполняется неравенство $\sup\{\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|{}_t T_\alpha(L(t))\|, t > 0\} < +\infty$.

Применив преобразование Ляпунова к системе (1), получим линейную систему в подчиненных производных (того же порядка α , что и система (1)) с ограниченными коэффициентами

$${}_t T_\alpha(y) = L^{-1}(t)(A(t) - {}_t T_\alpha(L(t)))y, \quad (2)$$

Определение 3. Системы (1) и (2), связанные преобразованием Ляпунова, будем называть *асимптотически эквивалентными (по Богданову)*.

Аналогично решениям асимптотически эквивалентных линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [2]), решения асимптотически эквивалентных линейных систем в подчиненных дробных производных имеют схожий характер поведения (асимптотику) при $t \rightarrow +\infty$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические методы и модели”.

Литература

1. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative *Journ. of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 264 (2014), 65–70.
2. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах. *Дифференц. уравнения*. Т. 1, No. 6 (1965), 707–716.