Литература

1. Инструменты экологизации в транспортно-логистической деятельности /Кошечнов, А.С. // Economics: Yesterday, Today and Tomorrow, Vol. 9, (2019), 1–12.

2. Яндыганов Я.Я., Власова Е.Я., Никулина Н.Л. Экологическая безопасность региона (социально-экологоэкономический аспект) // Экономика региона. №3 (2008), 144–153.

3. Database [Electronic resource] // Worldbank. – Mode of access: https://data.worldbank.org/ – Date of access: 15.04.2021.

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. В. Игнатенко, Л. А. Янович (Минск, Беларусь)

Пусть на множестве X функций $x(t)$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, задан функционал

$$J(x) = J(x_0) + \int_0^1 ds \int_T f[s(P_n(x) - P_n(x_0)) + P_n(x_0), a(t)](P_n(x) - P_n(x_0))dt, \tag{1}$$

где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен n-й степени от функции $x = x(t)$ с переменными коэффициентами; $a(t)$ — некоторая функция, заданная на T.

Теорема 1. Решением дифференциального уравнения

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = J_0 + f(P_n(x), a(t))P_n'(x) \tag{2}$$

с начальным условием $J(x_0) = J_0$ является функционал (1).

Схема доказательства. Используя определение, вычислим дифференциал Гато $\delta J[x; h]$ функционала (1) и получим следующую формулу для вариационной производной этого функционала:

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = \int_0^1 ds \left\{ f' \left[s(P_n(x) - P_n(x_0)) + P_n(x_0), a(t) \right] sP_n'(x)(P_n(x) - P_n(x_0)) + \right.$$

$$\left. + f[s(P_n(x) - P_n(x_0)) + P_n(x_0), a(t)] \; P_n'(x) \right\}.$$

Введем функцию $\phi(s) = f[s(P_n(x) - P_n(x_0)) + P_n(x_0), a(t)]P_n'(x)s$, тогда

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = \int_0^1 \phi'(s)ds = \phi(1) - \phi(0) = f(P_n(x), a(t))P_n'(x),$$

что доказывает теорему 1.

Рассмотрим уравнение (2) в частном случае, когда в качестве независимой переменной функционала f выступают алгебраические многочлены с функциональными коэффициентами $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk}(t)x^k$ $(x = x(t), x_0 = x_0(t), t \in T)$. Через $J(P_n(x))$ обозначим функционал

$$J(P_n(x)) = J(P_n(x_0)) +$$

$$+ \int_0^1 ds \int_T f[s(P_n(x) - P_n(x_0)) + P_n(x_0), a(t)](P_n(x) - P_n(x_0))dt. \tag{3}$$

Вычислив дифференциал Гато $\delta J[P_n(x); H]$ и вариационную производную $\dfrac{\delta J(P_n(x))}{\delta P_n(x(t))}$ функционала (3), приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Функционал (3) является решением уравнения

$$\frac{\delta J(P_n(x))}{\delta P_n(x(t))} = J(P_n(x_0)) + f[P_n(x), a(t)](P_n(x) - P_n(x_0)).$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, задание 1.3.01.

О ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А. И. Иноземцев (Липецк, Россия)

Работа содержит условия, при которых неоднородное частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x_1,x_2) = \lambda K_1\varphi(x) + f(x) = \lambda\int\limits_{a_1}^{b_1} k_1(x;t_1)\varphi(t_1,x_2)\,dt_1 + f(x) \tag{1}$$

с вырожденным ядром $k_1(x;t_1) = \sum\limits_{i=1}^{N}\tilde{k}_{1i}(x)a_i(t_1)$ однозначно разрешимо в анизотропных пространствах функций Лебега $L_{\mathbf{p}}(D) = L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2}) = L_{p_2}\left(D_2; L_{p_1}(D_1)\right)$, $x = (x_1,x_2) \in D_{1,2} = D_1 \times D_2 = (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$. Анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ определяется нормой

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}|u(x_1,x_2)|^{p_1}\,dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

В работе [1] показано существование и единственность решения уравнения (1) $\varphi(x) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$ в общем случае ядер из пространства $L_{p_2q_2}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$, которое получено классическим методом последовательных приближений в виде ряда Неймана $\varphi(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\lambda^j K_1^j f$ и указаны условия его сходимости в анизотропных пространствах. Из работы [1] следует, что ядро $k_1(x;t_1) \in L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$, тогда $k_{1i}(x) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, $a_i(t_1) \in L_{q_1}(D_1)$. Обозначим

$$D_\lambda(x_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\mu_{11}(x_2) & \dots & -\lambda\mu_{1N}(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\mu_{N1(x_2)} & \dots & 1-\lambda\mu_{NN}(x_2)\end{vmatrix} \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$$

— полином степени N относительно переменной λ с коэффициентами $\mu_{ij}(x_2) = \int\limits_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\tilde{k}_{1j}(t_1,x_2)\,dt_1 \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$. Тогда справедлива

Теорема. Если $D_\lambda(x_2) \neq 0$, то уравнение (1) с вырожденным ядром однозначно разрешимо при любом $f(x_1,x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$.

Литература

1. *Lyakhov L.N., Inozemcev A.I., Trusova N.I.* About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$. Jornal Of Mathematical Sciences. – Springer. Vol. 251. №6 (2020), 839–849.

К ПРОБЛЕМЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б. С. Калитин (Минск, Беларусь)

Пусть $(X, \mathbf{R}^+, \pi)$ — полудинамическая система [1] на метрическом пространстве X с функцией расстояния $d : X \times X \to \mathbb{R}$ и фазовым отображением $\pi : X \times R^+ \to X$, где $\pi(x,t) = xt$ $\forall x \in X$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Используем обозначения: $B(M,\Delta) = \{x \in X : d(M,x) < \Delta\}$, $\Delta > 0$; $\mathbf{C}(B(M,\Delta),\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций; $\gamma^-(x) = x\mathbb{R}^-$ — отрицательная полутраектория точки $x \in X$; $\mathbf{K}$ – множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,