О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ

М. Т. Дженалиев, М. Г. Ергалиев (Алматы, Казахстан)

Пусть $Q_{xt} = \{x_1, x_2, t : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < kt, \ 0 < t < T < \infty, \ 0 < k < \infty\}$ – область, $\Omega_t = \{|x| < kt\}$ — сечение области Q_{xt} для $\forall\, t \in (0,T)$. $\Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (0,T)$, где $\partial\Omega_t$ есть граница круга Ω_t.

Прямую задачу мы изучаем для двумерного уравнения Бюргерса:

$$Bu \equiv \partial_t u + \frac{1}{2}\mathrm{div}(u^2) - \nu\Delta u = f, \ \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$\partial_{\vec{n}}^{(j)} u(x_1, \sqrt{k^2t^2 - x_1^2}, t) = \partial_{\vec{n}}^{j} u(x_1, -\sqrt{k^2t^2 - x_1^2}, t), \ j = 0, 1, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega_t$, $f \in L_2(Q_{xt})$, $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 1. Граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение $u \in W$, где $W \equiv L_2(0,T; W_2^2(\Omega_t)) \cap W^1(0,T; L_2(\Omega_t))$.

Обратная задача: найти пару функций $\{u(x,t), \lambda(t)\}$, удовлетворяющих уравнению Бюргерса $Bu = \lambda(t)f(x), \ \{x,t\} \in Q_{xt}$, с условиями на границе (2) и условием переопределения

$$\int\limits_{\Omega_t} u(x,t)dx = E(t), \ t \in (0,T], \tag{3}$$

где $f \in L_\infty(\Omega_T), \ \bar{f}(t) = \int\limits_{\Omega_t} f(x)dx \not\equiv 0, \ E(t) \in W_2^1(0,T)$.

Теорема 2. Обратная задача имеет единственное решение $\{u(x,t) \in W, \ \lambda(t) \in L_2(0,T)\}$, где $u(x,t)$ удовлетворяет нагруженному уравнению Бюргерса

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\mathrm{div}(u^2) - \nu\Delta u + k\frac{f(x)}{\bar{f}(t)} u(x,t)|_{|x|=kt} = \frac{f(x)}{\bar{f}(t)} E'(t), \ \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{4}$$

и граничным условиям (2), и $\lambda(t)$ определяется по формуле

$$\lambda(t) = -k\frac{u(x,t)|_{|x|=kt}}{\bar{f}(t)} + \frac{E'(t)}{\bar{f}(t)}.$$

Для установления разрешимости граничной задачи (4) и (2) мы используем наши результаты по нагруженным уравнениям [1].

Благодарности. Это исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Grant No. AP08855372, 2020–2022).

Литература

1. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженнные уравнения — как возмущения дифференциальных уравнений.* Алматы: Ғылым (2010).

О ЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ p-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Довгодилин (Минск, Беларусь)

Пусть $\mathbb{C}_p$ — кольцо p-комплексных чисел вида $a + jb$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc и только они. Более подробно с p-комплексными числами можно ознакомиться в [1]. Пусть $D \subset \mathbb{C}_p$ – область, а функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ p-голоморфна в D. С p-голоморфными функциями можно ознакомиться в [2]. Пусть $z = x + jy$ и $w = u + jv$.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ p-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и $a = \alpha + j\beta \in D$. Если $u'_x(\alpha, \beta) \neq 0$, то существует открытая окрестность A точки a и открытая окрестность B точки $b = f(a)$ такие, что функция $f : A \to B$ имеет обратную $f^{-1} : B \to A$, которая непрерывно р-дифференцируема в B и

$$\{f^{-1}\}'(w) = \{f'(z)\}^{-1},$$

где $w = f(z)$. Если же $u'_x(x, y) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, то f не обратима в соответствующей окрестности точки a.

Пусть $g : D \subset \mathbb{C}_p^2 \to \mathbb{C}_p$.

Определение. Говорят, что функция $f : E \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$, $w = f(z)$ задана на E **неявно** уравнением $g(z, w) = 0$, если для любого $z \in E : g(z, f(z)) = 0$.

Пусть $D^* = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (z, w) \in D\}$. Функция $g(z, w) = A(x, y, u, v) + jB(x, y, u, v)$. Поставим g в соответсвие отображение $G = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} : D^* \to \mathbb{R}^2$. Обозначим $G'_w = \begin{bmatrix} A'_u & A'_v \\ B'_u & B'_v \end{bmatrix}$, $J = \begin{vmatrix} A'_u & A'_v \\ B'_u & B'_v \end{vmatrix}$, $G'_z = \begin{bmatrix} A'_x & A'_y \\ B'_x & B'_y \end{bmatrix}$.

Уравнение $g(z, w) = 0$ равносильно системе $\begin{cases} A(x, y, u, v) = 0 \\ B(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$

Теорема 2. Пусть G дважды дифференцируемо в D^* и $A'_u = B'_v$, $A'_v = 0$, $A'_x = B'_y$, $A'_y = 0$. Если точка $(z_0, w_0) \in D \subset \mathbb{C}_p^2$ такая, что $g(z_0, w_0) = 0$ и $\det[G'_w(z_0, w_0)] \neq 0$, тогда найдется окрестность E точки z_0 и единственная р-голоморфная функция $f : E \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ такая, что $w_0 = f(z_0)$, и $g(z, f(z)) \equiv 0$, причем

$$f'(z) = -\frac{A'_x A'_u}{J} + j\frac{A'_x B'_u - A'_u B'_x}{J}.$$

Литература

1. *Довгодилин В.В.* Сходимость на множестве р-комплексных чисел и свойства р-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // *Весці БДПУ.* Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. №4 (2020), 32–39.

2. *Васильев И.Л., Довгодилин В.В.* О некоторых свойствах р-голоморфных и р-аналитических функций // *Весці Нац. акад. навук Беларусі.*. Сер. фіз.-мат. навук. Т. 57, №2 (2021), 176–184.

ON SLIDING WINDOWS APPROACH FOR THE VISUALIZATION OF THE PERIODICITY VIOLATION OF THE HUMAN LIVER TISSUE

O. Doubrovina (Minsk, Belarus)

The pseudo-periodic structure of human liver tissue having can be detected by the properties of the ultrasound backscattered echo signal (or RF signal). It is known that liver diseases such as tumors or cirrhosis violate the periodicity of the structure. There are several techniques based on the wavelet analysis to identify these cases [1].

The tool for detecting the periodicity of registered RF signal was proposed in [2]. It is called the scale index ind_{sc} and it is calculated for the energy of the signal's wavelet approximation on specified decomposition levels. This index takes values in the interval $[0, 1]$, for periodic signals $ind_{sc} = 0$, for highly non-periodic signals $ind_{sc} = 1$ (see [2]).

This idea was applied in the series of experiments including the artificial phantom with predefined periodic structure immersed into the liquid with different noisy properties, numerical model, and liver tissue with cancerous areas in vivo described in [3, 4]. The RF signals had been registered by the ultrasound scanner SonixTOUCH Research usually used in medicine.

In [4] it was shown that the mean value of the scale index for chosen small rectangular regions for the healthy is near to zero and it increases for tumor area.

The idea of this investigation is to find the changes of the scale index values taken in the border of the affected area of the human liver. This approach includes a sliding windows technique to