О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ

Е. В. Громак (Минск, Беларусь)

В настоящей работе рассматриваются аналитические свойства решений уравнений

$$q'' + 3q^2 + \beta_1 q = z/2, \tag{1}$$

$$q^{(4)} + 10q^3 + 5(q')^2 + 10q\, q'' + (\beta_1 + \beta_2)(3q^2 + q'') + \beta_1\beta_2\, q = z/2, \tag{2}$$

где β_1, β_2 — произвольные постоянные параметры. Уравнение (1) с точностью до линейного калибровочного преобразования является первым уравнением Пенлеве, а уравнение (2) аналогом четвертого порядка первого уравнения Пенлеве [1–3]. Известно, что произвольное решение уравнения (1) является мероморфной функцией с бесконечным числом двукратных полюсов. Мероморфное решение уравнения (2) также имеет бесконечное число двукратных полюсов двух типов с различными главными частями. На множестве решений уравнений обобщенной иерархии первого уравнения Пенлеве рассматривается линейное уравнение

$$u^{(n)} + (\lambda \xi^{[N]}(z) + \mu)u = 0, \tag{3}$$

где $\xi^{[N]}(z)$ — фиксированное мероморфное решение N-го уравнения иерархии, а $\lambda \neq 0, \mu$ — постоянные параметры. Особый интерес представляют случаи, когда общее решение уравнения (3) мероморфно. Конечными особыми точками решения $u(z)$ уравнения (3) могут быть лишь полюса функции $\xi^{[N]}(z)$. Для нетривиального $u(z)$ с $n = 1$ они являются существенно особыми точками. Для уравнения (3) с $n > 1$ полюса функции $\xi^{[N]}(z)$ являются регулярными особыми точками. Случай $n = 2$ для первого уравнения Пенлеве в стандартной форме рассматривался ранее (см., например, [4]). Пусть $n = 2$, тогда для уравнений (1) и (2), в частности, справедливо утверждение.

Пусть в уравнении (3) $n = 2$ и

1. $\xi^{[1]}(z)$ — произвольное решение уравнения (1) . Тогда при $\lambda = 1$, либо $\lambda = 6$ с дополнительным условием $\mu = \beta_1$, общее решение уравнения (3) мероморфно.

2. $\xi^{[2]}(z)$ — произвольное мероморфное решение уравнения (2). Тогда при $\lambda = 1$ общее решение уравнения (3) мероморфно.

Литература

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков (1939).

2. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований (2004).

3. *Громак В.И.* Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференц. уравнения.* Т. 56. № 8 (2020), 1017–1033.

4. *Chazy J.* Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Math.* V. 34 (1911), 317–385.

A FUNCTIONAL-ANALYTIC APPROACH OF MONOGENIC FUNCTIONS WITH VALUES IN COMMUTATIVE COMPLEX ALGEBRAS OF THE SECOND RANK TO THE GENERALIZED BIHARMONIC EQUATION WITH NON-ZERO SIMPLE CHARACTERISTICS

S. V. Gryshchuk (Kyiv, Ukraine)

Among all two-dimensional algebras of the second rank with unity e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, we found a semi-simple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}$, $\omega^2 = e$, containing bases $\{e_1, e_2\}$, such that $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions $\Phi(xe_1 + ye_2)$ (x, y are real variables) satisfy the fourth order homogeneous partial differential equation which has only simple and non-zero characteristics. A set of pairs $(\{e_1, e_2\}, \Phi)$ is described in the explicit form.

Particular cases are considered in [1–3].

Acknowledgment. The work is partially supported by the Grant of Ministry of Education and Science of Ukraine (Project No. 0116U001528).

References

1. *Gryshchuk S.V.* Commutative Complex Algebras of the Second Rank with Unity and Some Cases of Plane Orthotropy I. Ukr. Math. J. **70** (8) (2019), 1221–1236.

2. *Gryshchuk S.V.* Commutative Complex Algebras of the Second Rank with Unity and Some Cases of Plane Orthotropy I. Ukr. Math. J. **70** (10) (2019), 1594–1603.

3. *Gryshchuk S.V.* $\mathbb{B}_0$-valued monogenic functions and their applications to the theory of anisotropic plane media, In: *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2018* (Eds. S.V. Rogosin and M.V. Dubatovskaya), Cambridge: Cambridge Scientic Publishers Ltd, (2020), 33–48.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО КОМПОЗИЦИЮ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Дайняк (Минск, Беларусь)

Работа посвящена отысканию корректных постановок задач для уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами, главная часть которых представляет композицию двух операторов.

В ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим уравнение вида

$$\mathcal{L}u = \Big(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\big(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big)\Big) + \mathcal{L}_1(x,D)u = f(x),$$

$$\mathcal{L}_1(x,D)u = \sum_{k=0}^{1} q_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u. \tag{1}$$

здесь $a(x)$ — достаточно гладкая функция, $\mathcal{L}_1(x,D)$ — дифференциальный полином первого порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Пусть $\mathcal{L}_0(\nu) = \nu_0^3 + a(x)\nu_0\nu_1^2 + \nu_0^2\nu_1 + a(x)\nu_1^3$, где $\nu = (\nu_0, \nu_1)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. К уравнению (1) присоединим граничные условия вида

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu) < 0$.

Вместе с задачей (1)–(2) будем рассматривать сопряженную к ней

$$\mathcal{L}^\star v = g(x), \tag{3}$$

$$v\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \tag{4}$$

где $\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}$, $\mathcal{L}^\star$ – формально сопряжённый к $\mathcal{L}$ оператор.

Задачу (1)–(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f \tag{5}$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega)$, а задачу (3)–(4) — как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^\star v = g \tag{6}$$

с $\mathcal{D}(\mathcal{L}^\star) = \dot{H}^3(\Omega)$.