

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ

Е. В. Громак (Минск, Беларусь)

В настоящей работе рассматриваются аналитические свойства решений уравнений

$$q'' + 3q^2 + \beta_1 q = z/2, \quad (1)$$

$$q^{(4)} + 10q^3 + 5(q')^2 + 10q q'' + (\beta_1 + \beta_2)(3q^2 + q'') + \beta_1 \beta_2 q = z/2, \quad (2)$$

где β_1, β_2 — произвольные постоянные параметры. Уравнение (1) с точностью до линейного калибровочного преобразования является первым уравнением Пенлеве, а уравнение (2) аналогом четвертого порядка первого уравнения Пенлеве [1–3]. Известно, что произвольное решение уравнения (1) является мероморфной функцией с бесконечным числом двукратных полюсов. Мероморфное решение уравнения (2) также имеет бесконечное число двукратных полюсов двух типов с различными главными частями. На множестве решений уравнений обобщенной иерархии первого уравнения Пенлеве рассматривается линейное уравнение

$$u^{(n)} + (\lambda \xi^{[N]}(z) + \mu)u = 0, \quad (3)$$

где $\xi^{[N]}(z)$ — фиксированное мероморфное решение N -го уравнения иерархии, а $\lambda \neq 0, \mu$ — постоянные параметры. Особый интерес представляют случаи, когда общее решение уравнения (3) мероморфно. Конечными особыми точками решения $u(z)$ уравнения (3) могут быть лишь полюса функции $\xi^{[N]}(z)$. Для нетривиального $u(z)$ с $n = 1$ они являются существенно особыми точками. Для уравнения (3) с $n > 1$ полюса функции $\xi^{[N]}(z)$ являются регулярными особыми точками. Случай $n = 2$ для первого уравнения Пенлеве в стандартной форме рассматривался ранее (см., например, [4]). Пусть $n = 2$, тогда для уравнений (1) и (2), в частности, справедливо утверждение.

Пусть в уравнении (3) $n = 2$ и

1. $\xi^{[1]}(z)$ — произвольное решение уравнения (1). Тогда при $\lambda = 1$, либо $\lambda = 6$ с дополнительным условием $\mu = \beta_1$, общее решение уравнения (3) мероморфно.
2. $\xi^{[2]}(z)$ — произвольное мероморфное решение уравнения (2). Тогда при $\lambda = 1$ общее решение уравнения (3) мероморфно.

Литература

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков (1939).
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований (2004).
3. Громак В.И. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференц. уравнения*. Т. 56. № 8 (2020), 1017–1033.
4. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Math.* V. 34 (1911), 317–385.

A FUNCTIONAL-ANALYTIC APPROACH OF MONOGENIC FUNCTIONS WITH VALUES IN COMMUTATIVE COMPLEX ALGEBRAS OF THE SECOND RANK TO THE GENERALIZED BIHARMONIC EQUATION WITH NON-ZERO SIMPLE CHARACTERISTICS

S. V. Gryshchuk (Kyiv, Ukraine)

Among all two-dimensional algebras of the second rank with unity e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, we found a semi-simple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}$, $\omega^2 = e$, containing bases $\{e_1, e_2\}$, such that $\mathbb{B}_0$ -valued “analytic” functions $\Phi(xe_1 + ye_2)$ (x, y are real variables) satisfy the fourth order homogeneous partial differential equation which has only simple and non-zero characteristics. A set of pairs $(\{e_1, e_2\}, \Phi)$ is described in the explicit form.