1. при $m = -2$ имеем $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) = l - 1$, то есть в обеих областях $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ нет предельного цикла второго рода,

2. при $m = -1$ имеем $l - 1 \leq \sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) \leq l$, то есть не более чем в одной из областей $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода,

3. при $m = 1$ имеем $l \leq \sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) \leq l + 1$, то есть хотя бы в одной из областей $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода,

4. при $m = 2$ имеем $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) = l + 1$, то есть в обеих областях $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода.

Литература

1. *Гринь А.А., Рудевич С.В.* Признак Дюлака–Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре *Дифференциальные уравнения.* Том **55**. No. 3 (2019), 328–336.

КОМПОЗИЦИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА КАПУТО

А. П. Гринько (Барановичи, Беларусь)

В работе изучаются композиционные свойства правосторонних локализованных дробных производных типа Римана–Лиувилля

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi\left(t\right)}{\left(x-t\right)^{\{\alpha\}}}dt, 0<\alpha, -\infty<a\leqslant x\leqslant b<\infty \tag{1}$$

и типа Маршо

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{\phi\left(x\right)-\phi\left(x-\varepsilon\right)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi\left(x\right)-\phi\left(\tau\right)}{\left(x-\tau\right)^{1+\alpha}}d\tau,$$

$$0<\alpha<1, -\infty<a\leqslant x\leqslant b<\infty, \tag{2}$$

которые являются обобщениями классических дробных производных Риманна–Лиувилля и Маршо см. [1, 2]. Для локализованных дробных производных (1) и (2) доказываются достаточные условия, при которых они совпадают, соответственно, с локализованными производными типа Капуто:

$$({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}f)(x+\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{f^{(n)}(t)dt}{(x+\varepsilon-t)^{1+\alpha-n}} \tag{3}$$

и

$$({}^{C}D^{\alpha,-\varepsilon}f)(x+\varepsilon) = \frac{f^{(n)}(x+\varepsilon)-f^{(n)}(x)}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)\varepsilon^{\{\alpha\}}} + \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{f^{(n)}(x+\varepsilon)-f^{(n)}(t)}{(x+\varepsilon-t)^{1+\{\alpha\}}}dt. \tag{4}$$

Теорема. Пусть $f\left(t\right)\in AC^{n}\left[b;c\right], n=[\alpha]+1$, тогда локализованные дробные производные типа Римана-Лиувилля (3) и Маршо (4) существует почти всюду и имеют место равенства

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} = {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon},$$

$$D^{\alpha,-\varepsilon} = {}^{C}D^{\alpha,-\varepsilon}.$$

Доказательство см. [3].

Полученные результаты используются для вычисления локализованных дробных производных от функции Вейерштрасса.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.

2. *Grinko A.P.* Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions.* **30** (10) (2019), 817–832.

3. *Grinko A.P.* Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type. *Integral Transforms and Special Functions.* Received 17 Nov 2020, Accepted 13 Jan 2021, Published online: 08 Feb 2021. https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1877288

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ P_{34}

В. И. Громак (Минск, Беларусь)

Множество обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \tag{1}$$

где $\Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q(z)] - z/2 \neq 0, (\cdot)' = d(\cdot)/dz$, а оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u] = [\left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_N)\frac{d}{dz} + 2u_z\right)\widetilde{L}_N[u], \quad \widetilde{L}_1[u] = u, u = u(z), \quad N = 1, 2, ...,$$

β_N — произвольные параметры, называют обобщенной иерархией уравнения P_{34} [1]. При $N = 1$ первое уравнение иерархии обладает свойством Пенлеве и имеет порядковый номер 34 из классификационного списка Пенлеве [2]. Уравнения иерархии (1) имеют порядок $2N$ и, по-сути, являются модифицированными уравнениями иерархии второго уравнения Пенлеве, так как эти уравнения связаны преобразованием Миуры.

В настоящей работе исследуется вопрос представления рациональных решений уравнения (1) в виде определителей [3, 4] (представление Jocobi-Trudi), компоненты которых удовлетворяют как линейному дискретному, так и линейному дифференциальному уравнению, общее решение которого выражается через обобщенные гипергеометрические функции.

Теорема. *Рациональное решение N-го члена иерархии (1)* $q^{[N]}(z, \sigma, \beta)$ *может быть представлено как*

$$q^{[N]}\left(z, \pm(m + 1/2), \beta\right) = 2\frac{d^2}{dz^2}\ln\left(\det p_m^{[N]}(z)\right),$$

где полиномы $p_k^{[N]}(z)$ *удовлетворяют линейному уравнению порядка* $2N + 1$

$$\left(4^N D^{2N+1} + 4^{N-1} s_{N-1} D^{2N-1} + ... + 4s_1 D^3 - zD + m\right) p_m^{[N]} = 0. \tag{2}$$

где $s_l, l = 1, ...N - 1,$ *– основные симметрические полиномы параметров* $\beta_1, ..., \beta_{N-1}$.

Литература

1. *Громак В.И.* Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференц. уравнения.* Т. 56. № 8 (2020), 1017–1033.

2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков (1939).

3. *Kajiwara K., Ohta Y.* Determinant structure of the rational solutions for the second Painleve II equation. Journal of the Mathematical Physics. Vol. 37(9) (1996), 4693–4704.

4. *Bobrova I.* On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications. Arxiv: (2010).10617v2.