where δ_{HYBRID} is an average investment rate, $Inv(t)$ is an aggregation of well-known models (Harioka & Feldstein, Modigliani, Foure & Benassy–Querre & Fontagne, Duesenberry) of the transformation of savings into investments. The model for calculating labor resources is simple. It is the average of the national and two forecasts of UN and Census Bureau US. The model for assessing the quality of human capital is borrowed from Barro & Lee:

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = \psi(edu), \tag{3}$$

where ψ is some piecewise linear function of the average duration of education of labors. The TFP calculation model is based on the idea of Nelson & Felps and Benhabib & Spiegel in the following form:

$$\frac{(T\dot{F}P)_i(t)}{TFP_i(t)} = 1,33 + \beta^i \left(lnGDP_{(}p.c.)^U C(t-1) - lnGDP_{(}p.c.)^i(t-1)\right), \tag{4}$$

where β^i is the rate of convergence (borrowing of innovations and technologies), $GDP_{(}p.c.)^U C$ is GDP per capita in the US and $GDP_{(}p.c.)^i$ is in country i.

Based on the differential hybrid models, a long-term forecast of potential economic growth in the EAEU member states is proposed.

References

1. *Gospodarik C. EAEU-2050: Global Trends and Eurasian Economic Policy.* Minsk: BSU (2015).

2. *Gospodarik C. Perspective of EAEU is the model of innovative breakthrough.* (ed. by M.M. Kovalev.) Minsk: BSU (2020).

3. *Barro R.* Economic Growth, 2nd ed. Cambridge: MIT Press (2004).

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ НА ЦИЛИНДРЕ

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим автономную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{1}$$

где функции $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 2π–периодические по первой переменной. Фазовым пространством системы (1) является цилиндр $\mathcal{Z} : \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $\mathcal{S}^1$ — единичная окружность. Наша цель — оценить количество $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z})$ предельных циклов второго рода (окружающих цилиндр) Γ^{II} системы (1) в $\mathcal{Z}$ при следующих предположениях: (A_1). Функции P и Q принадлежат пространству $C^1_{2\pi}(\mathcal{Z}, \mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемых функций, отображающих $\mathcal{Z}$ в $\mathbb{R}$. (A_2). $\mathcal{Z}$ не содержит особых точек системы (1).

Наш подход основан на применении функции Дюлака–Черкаса [1]. Принципиальное значение функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x,y)$ состоит в том, что если множество $\mathcal{W} := \{(x,y) \in \mathcal{Z} : \Psi(x,y) = 0\}$ определяет l кривых, трансверсальных траекториям системы, то цилиндрическое фазовое пространство делится на $l+1$ двусвязные области, среди которых нужно различать внутренние области, границы которых состоят из трансверсальных кривых и которые содержат единственный предельный цикл, и две внешние области $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$, где только одна граница этих областей является трансверсальной кривой, содержащие не более одного предельного цикла. Чтобы определить точное количество предельных циклов нужно проверить существование предельного цикла в двух внешних областях. В докладе будут представлены подходы для такой проверки за счет построения дополнительных функций Дюлака–Черкаса в разных областях (многошаговый подход), либо в $\mathcal{Z}$ (двухшаговый подход) [1].

Теорема. Пусть при предположениях $(A_1)-(A_2)$ существует вторая функция Дюлака–Черкаса Ψ_1 системы (1) в $\mathcal{Z}$ с $k_1 < 0$ такая, что соответствующее множество $\mathcal{W}_1 := \{(x,y) \in \mathcal{Z} : \Psi_1(x,y) = 0\}$ состоит из $l+m \geq 0$ овалов, $m = \pm 1, \pm 2$. Тогда

1. при $m = -2$ имеем $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) = l - 1$, то есть в обеих областях $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ нет предельного цикла второго рода,

2. при $m = -1$ имеем $l - 1 \leq \sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) \leq l$, то есть не более чем в одной из областей $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода,

3. при $m = 1$ имеем $l \leq \sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) \leq l + 1$, то есть хотя бы в одной из областей $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода,

4. при $m = 2$ имеем $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z}) = l + 1$, то есть в обеих областях $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$ существует единственный предельный цикл второго рода.

Литература

1. *Гринь А.А., Рудевич С.В.* Признак Дюлака–Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре *Дифференциальные уравнения.* Том **55**. No. 3 (2019), 328–336.

КОМПОЗИЦИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА КАПУТО

А. П. Гринько (Барановичи, Беларусь)

В работе изучаются композиционные свойства правосторонних локализованных дробных производных типа Римана–Лиувилля

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi\left(t\right)}{\left(x-t\right)^{\{\alpha\}}}dt, 0<\alpha, -\infty<a\leqslant x\leqslant b<\infty \tag{1}$$

и типа Маршо

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{\phi\left(x\right)-\phi\left(x-\varepsilon\right)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\phi\left(x\right)-\phi\left(\tau\right)}{\left(x-\tau\right)^{1+\alpha}}d\tau,$$

$$0<\alpha<1, -\infty<a\leqslant x\leqslant b<\infty, \tag{2}$$

которые являются обобщениями классических дробных производных Риманна–Лиувилля и Маршо см. [1, 2]. Для локализованных дробных производных (1) и (2) доказываются достаточные условия, при которых они совпадают, соответственно, с локализованными производными типа Капуто:

$$({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}f)(x+\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{f^{(n)}(t)dt}{(x+\varepsilon-t)^{1+\alpha-n}} \tag{3}$$

и

$$({}^{C}D^{\alpha,-\varepsilon}f)(x+\varepsilon) = \frac{f^{(n)}(x+\varepsilon)-f^{(n)}(x)}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)\varepsilon^{\{\alpha\}}} + \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{f^{(n)}(x+\varepsilon)-f^{(n)}(t)}{(x+\varepsilon-t)^{1+\{\alpha\}}}dt. \tag{4}$$

Теорема. Пусть $f\left(t\right)\in AC^{n}\left[b;c\right], n=[\alpha]+1$, тогда локализованные дробные производные типа Римана-Лиувилля (3) и Маршо (4) существует почти всюду и имеют место равенства

$$\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} = {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon},$$

$$D^{\alpha,-\varepsilon} = {}^{C}D^{\alpha,-\varepsilon}.$$

Доказательство см. [3].

Полученные результаты используются для вычисления локализованных дробных производных от функции Вейерштрасса.