где $x = x(t)$ — координата, описывающая положение объекта в зависимости от времени t, параметр ω удовлетворяет неравенству $\omega > 0$, на управление наложено ограничение $u \in [-\epsilon_1; \epsilon_2]$, $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ и в каждый момент времени производная $\dot{x}$ функции x удовлетворяет фазовому ограничению

$$\dot{x} \le d, d > 0. \tag{2}$$

Построим множество управлемости $Y(\tau)$ этого объекта в начало координат, то есть множество всех точек фазового пространства, удовлетворяющих фазовому ограничению (2), из которых можно перейти на отрезке времени $[0;\tau]$ в начало координат при всевозможных допустимых управлениях. Будем рассматривать такие моменты времени τ, для которых выполняется неравенство $\tau\omega \le \dfrac{\pi}{2}$.

С помощью замены $x = y_1, \dot{x} = \omega y_2$ уравнение (1) сведем к нормальной системе дифференциальных уравнений $\dot{y}_1 = \omega y_2, \dot{y}_2 = -\omega y_1 + v$, в которой вектор управления $(o; v)$ будет принимать значения из отрезка

$$V = \{(v_1; v_2) \in R^2 | v_1 = 0, -\frac{\epsilon_1}{\omega} \le v_2 \le \frac{\epsilon_2}{\omega}\} = \{(v_1; v_2) \in R^2 | v_1 = 0, -l_1 \le v_2 \le l_2\}.$$

Примем, что справедливо неравенство $d\omega < l_1$. В противном случае фазовое ограничение не оказывает влияния на решение задачи и искомое множество управляемости будет совпадать с множеством управляемости для задачи без ограничения (2). Обозначим через τ_1 момент времени, при котором множество управляемости, построенное без учета фазового ограничения, впервые достигает прямую $y_2 = d$.

Теорема. В плоскости переменных y_1, y_2 множество $Y(\tau)$ для тех моментов времени, для которых выпоняются неравенства $\tau_1\omega < \tau\omega \le \frac{\pi}{2}\omega$ ограничено следующими линиями: окружностью радиуса $\dfrac{l_1 + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega} cos\tau\omega; \dfrac{l_1}{\omega} sin\tau\omega\right)$; окружностью радиуса $\dfrac{p + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{p - l_1}{\omega} cos(\tau - \tau_1)\omega + \dfrac{l_1}{\omega} cos\tau\omega; \dfrac{p - l_1}{\omega} sin(\tau - \tau_1)\omega + \dfrac{l_1}{\omega} sin\tau\omega\right)$, где $p = \dfrac{d\omega}{sin\tau\omega}$; прямой $y_2 = d$; окружностью радиуса $\dfrac{l_1 + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\frac{l_1}{\omega} - \frac{l_2}{\omega} cos\tau\omega; -\dfrac{l_2}{\omega} sin(\tau - \tau_1)\omega\right)$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, задание 1.2.04.4.

DIFFERENTIAL HYBRID MODELS OF ECONOMIC GROWTH

C. Gospodarik (Minsk, Belarus)

In [1, 2], discrete (finite-difference) hybrid models of economic growth are constructed and applied for long-term forecasting. The idea of hybrid forecasting models goes back to the cyberneticists Shannon and Neumann, synthesis of “reliable circuits from unreliable elements” and consists in the aggregation of classical models of economic growth based on production and econometric models.

The aggregated differential models for the discrete hybrid modelling are described in [1] and have the following form:

$$\frac{(dGDP(t))/dt}{GDP(t)} = \alpha \frac{(dK(t))/dt}{K(t)} + \beta \frac{(dL(t))/dt}{L(t)} + \gamma \frac{(dH(t))/dt}{H(t)} + \varphi \frac{(dTFP(t))/dt}{TFP(t)}, \tag{1}$$

where at time t magnitude $GDP(t)$ is the gross domestic product, $K(t)$ is the fixed capital, $L(t)$ is the labor, $H(t)$ is the quality of human capital, and $TFP(t)$ is the total factor productivity.

To calculate the capital is used also a hybrid model:

$$\frac{(dK(t))/dt}{K(t)} = Inv(t-1)\frac{GDP(t-1)}{2K(t-1)} + Inv(t)\frac{GDP(t)}{2K(t)} - \delta_{HYBRID}, \tag{2}$$

where δ_{HYBRID} is an average investment rate, $Inv(t)$ is an aggregation of well-known models (Harioka & Feldstein, Modigliani, Foure & Benassy–Querre & Fontagne, Duesenberry) of the transformation of savings into investments. The model for calculating labor resources is simple. It is the average of the national and two forecasts of UN and Census Bureau US. The model for assessing the quality of human capital is borrowed from Barro & Lee:

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = \psi(edu), \tag{3}$$

where ψ is some piecewise linear function of the average duration of education of labors. The TFP calculation model is based on the idea of Nelson & Felps and Benhabib & Spiegel in the following form:

$$\frac{(T\dot{F}P)_i(t)}{TFP_i(t)} = 1,33 + \beta^i \left(lnGDP_(p.c.)^U C(t-1) - lnGDP_(p.c.)^i (t-1) \right), \tag{4}$$

where β^i is the rate of convergence (borrowing of innovations and technologies), $GDP_(p.c.)^U C$ is GDP per capita in the US and $GDP_(p.c.)^i$ is in country i.

Based on the differential hybrid models, a long-term forecast of potential economic growth in the EAEU member states is proposed.

References

1. *Gospodarik C. EAEU-2050: Global Trends and Eurasian Economic Policy.* Minsk: BSU (2015).

2. *Gospodarik C. Perspective of EAEU is the model of innovative breakthrough.* (ed. by M.M. Kovalev.) Minsk: BSU (2020).

3. *Barro R.* Economic Growth, 2nd ed. Cambridge: MIT Press (2004).

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ НА ЦИЛИНДРЕ

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим автономную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{1}$$

где функции $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 2π–периодические по первой переменной. Фазовым пространством системы (1) является цилиндр $\mathcal{Z} : \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $\mathcal{S}^1$ — единичная окружность. Наша цель — оценить количество $\sharp\Gamma^{II}(\mathcal{Z})$ предельных циклов второго рода (окружающих цилиндр) Γ^{II} системы (1) в $\mathcal{Z}$ при следующих предположениях: (A_1). Функции P и Q принадлежат пространству $C^1_{2\pi}(\mathcal{Z}, \mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемых функций, отображающих $\mathcal{Z}$ в $\mathbb{R}$. (A_2). $\mathcal{Z}$ не содержит особых точек системы (1).

Наш подход основан на применении функции Дюлака–Черкаса [1]. Принципиальное значение функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x,y)$ состоит в том, что если множество $\mathcal{W} := \{(x,y) \in \mathcal{Z} : \Psi(x,y) = 0\}$ определяет l кривых, трансверсальных траекториям системы, то цилиндрическое фазовое пространство делится на $l+1$ двусвязные области, среди которых нужно различать внутренние области, границы которых состоят из трансверсальных кривых и которые содержат единственный предельный цикл, и две внешние области $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_l$, где только одна граница этих областей является трансверсальной кривой, содержащие не более одного предельного цикла. Чтобы определить точное количество предельных циклов нужно проверить существование предельного цикла в двух внешних областях. В докладе будут представлены подходы для такой проверки за счет построения дополнительных функций Дюлака–Черкаса в разных областях (многошаговый подход), либо в $\mathcal{Z}$ (двухшаговый подход) [1].

Теорема. Пусть при предположениях $(A_1) - (A_2)$ существует вторая функция Дюлака–Черкаса Ψ_1 системы (1) в $\mathcal{Z}$ с $k_1 < 0$ такая, что соответствующее множество $\mathcal{W}_1 := \{(x,y) \in \mathcal{Z} : \Psi_1(x,y) = 0\}$ состоит из $l + m \geq 0$ овалов, $m = \pm1, \pm2$. Тогда